CORRIGÉ de l'Examen d'Algèbre Linéaire

Remarque : Ce corrigé a été rédigé dans un esprit pédagogique, ce qui explique sa longueur : on trouvera, ici et là, un excès d'explications sous forme de "Commentaires", d'observations, de solutions alternatives, etc... qui ne sont pas toutes forcément nécessaires en conditions d'examen.

Exercice 1 : *(4 points)*
Remarquer que le plus facile est de résoudre le système $(*)$ qui définit F et de montrer que F est engendré par combinaison linéaires de deux vecteurs qu'on précisera, ce qui résout d'un coup toutes les 3 questions.
Cependant, par souci de complétude on répondra aux questions une après l'autre :

1. F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par un système linéaire homogène de 2 équations, ayant 4 inconnues. Donc il y a au moins la solution triviale, donc F ne peut être vide car il contient l'origine de $\mathbb{R}^4$. Comme $\mathbb{R}^4$ est un $\mathbb{R}$-e.v., F est $\mathbb{R}$-e.v. ssi il est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, ce qui équivaut à : $\forall\big((x,y,z,t),(x',y',z',t')\big) \in F\times F$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, on a $(x,y,z,t)+\lambda(x',y',z',t')\in F$.
Or, $(x,y,z,t)+\lambda(x',y',z',t') = (x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z', t+\lambda t')\in F$ équivaut à
$\left\{\begin{array}{rcl}(x+\lambda x')+(y+\lambda y') &=& 0\\ 2(x+\lambda x')-(z+\lambda z')+(t+\lambda t') &=& 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}(x+y)+\lambda(x'+y') &=& 0\\ (2x-z+t)+\lambda(2x'-z'+t') &=& 0\end{array}\right.$.
En tenant compte de l'hypothèse, à savoir que (x,y,z,t) et (x',y',z',t') vérifient un système du type $(*)$, le système ci-dessous devient $\left\{\begin{array}{rcl}0+\lambda\cdot 0 &=& 0\\ 0+\lambda\cdot 0 &=& 0\end{array}\right.$ ce qui est vrai $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

2. Pour résoudre le système $(*)$ par la méthode du pivot (de Gauss) on multiplie la première équation de $(*)$ par 2 et on la soustrait de la deuxième équation. On obtient :
$(*) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}x+y &=& 0\\ -2y-z+t &=& 0\end{array}\right.$ qui est un système linéaire homogène échelonné de rang 2, et, ayant 4 inconnues, on aura 2 inconnues principales et $4-2=2$ inconnues qu'on prendra comme couple de paramètres arbitraires $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Pour éviter les fractions, remarquer que le système précédent équivaut aussi à $\left\{\begin{array}{rcl}x \quad +y &=& 0\\ z+2y-t &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}x &=& -y\\ z &=& -2y+t\\ y &=& \lambda\\ t &=& \mu\end{array}\right. \quad \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$

3. De la question précédente on déduit que $F=\big\{(-\lambda,\lambda,-2\lambda+\mu,\mu)\mid\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\big\}$. Or, $\begin{pmatrix}-\lambda\\ \lambda\\ -2\lambda+\mu\\ \mu\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ d'où $F=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Ces deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$ n'étant pas proportionnels forment un système libre donc une base de F, puisqu'ils l'engendrent.
[*Commentaire* : tout système de vecteurs obtenu comme ci-dessus, i.e. après un algorithme du pivot mené à bout, fournit non seulement une famille génératrice pour le sev en question, mais automatiquement (du fait du pivot de Gauss) une famille libre donc une base de cet sev.]

Exercice 2 : *(6 points)*

1. [*Commentaire* : le déterminant Δ_m sera, une fois développé, un polynôme de degré 6 en variable m, donc pour trouver ses racines on a intérêt à le calculer de sorte que ce polynôme sorte du calcul directement factorisé. Pour cela, nous allons appliquer sur Δ_m des "opérations élémentaires", i.e. celles qui ne lui changent pas sa valeur.]
Par exemple, en remarquant que la somme des éléments de chaque ligne/colonne donne m^2+m+1 on remplace la première colonne par la somme de toutes les 3 colonnes. Ainsi :
$$\Delta_m = \begin{vmatrix}m^2+m+1 & m & 1\\ m^2+m+1 & 1 & m^2\\ m^2+m+1 & m^2 & m\end{vmatrix} = (m^2+m+1)\cdot\begin{vmatrix}1 & m & 1\\ 1 & 1 & m^2\\ 1 & m^2 & m\end{vmatrix} = (m^2+m+1)\cdot\begin{vmatrix}1 & m & 1\\ 0 & 1-m & m^2-1\\ 0 & m^2-m & m-1\end{vmatrix}$$

$$= (m^2+m+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & -(m-1) & (m-1)(m+1) \\ 0 & m(m-1) & m-1 \end{vmatrix} = (m^2+m+1)(m-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & -1 & m+1 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (m^2+m+1)(m-1)^2\cdot\begin{vmatrix} -1 & m+1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = (m^2+m+1)(m-1)^2(-1-m^2-m) = -(m^3-1)^2.$$

2. Un système $(S_{m,\lambda})$ équivalut à une équation matricielle : $\begin{pmatrix} m^2 & m & 1 \\ m & 1 & m^2 \\ 1 & m^2 & m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$.
Celle-ci admet une solution unique ssi la matrice 3×3 du membre de gauche, notée A, est inversible, et dans ce cas en multipliant l'équation à gauche par l'inverse A^{-1} de A et en tenant compte que $A^{-1}A = \mathbb{I}_3$ (matrice unité 3×3) on obtient la solution unique indiquée dans l'énoncé. Or, A est inversible ssi $\det A \neq 0$. Mais $\det A = \Delta_m = -(m^2+m+1)^2(m-1)^2$ et les racines de $m^2+m+1=0$ étant purement complexes (discriminant négatif) les seules racines réelles de $\Delta_m = 0$ sont celles de $(m-1)^2 = 0$, à savoir $m=1$. On déduit ainsi que les systèmes $(S_{m,\lambda})$ admettent une solution unique ssi $m \neq 1$.

3.a. Si $m=1$ on a : $(S_{1,\lambda})$: $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & \lambda^2 \\ x+y+z & = & \lambda \\ x+y+z & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & \lambda^2 \\ 0 & = & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & = & 1-\lambda^2 \end{array}\right.$.
Or, l'unique λ pour lequel les deux dernières équations sont satisfaites simultanément est $\lambda = 1$. Donc $(S_{1,\lambda})$ est compatible ssi $\lambda = 1$.

3.b. Si $\lambda = 1$, $(S_{1,\lambda})$ se réduit à $x+y+z=1$ qui fournit une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{S}_{1,1}$ des solutions de $(S_{1,1})$ en tant que plan de $\mathbb{R}^3$. Pour trouver des équations paramétriques de $\mathcal{S}_{1,1}$, on regarde $x+y+z=1$ comme une système à une équation et 3 inconnues, déjà échelonné, donc de rang 1 : on choisit comme inconnue principale (par exemple) x et on prend les autres 2 inconnues comme paramètres réels quelconques : $y=\lambda$ et $z=\mu$. Ainsi, un système d'équations paramétriques de $\mathcal{S}_{1,1}$ est : $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$,
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-\lambda-\mu \\ y & = & \lambda \\ z & = & \mu \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : *(11 points)*

Rappelons les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés : $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.

1. Étant donné que les familles de vecteurs $\mathscr{V} = \{v_1, v_2\}$ et, respectivement, $\mathscr{W} = \{w_1, w_2\}$ sont des familles à 2 vecteurs, elles sont libres ssi les composantes de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles. En effet, ceci est vrai car : $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1}$, respectivement $\frac{3}{5} \neq \frac{0}{-7}$.

2. Les vecteurs $u \in \mathcal{P} = \operatorname{Vect}\mathscr{V} = \{\lambda v_1 + \mu v_2 \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$ qui sont orthogonaux à v_1 vérifient l'annulation du produit scalaire $u\cdot v_1 = \lambda v_1\cdot v_1 + \mu v_1\cdot v_2 = \lambda(4+9+1)+\mu(2-3+2) = 14\lambda+\mu$.
D'où $\mu = -14\lambda$ ce qui donne $u = \lambda(v_1 - 14v_2) = \lambda\begin{pmatrix} -12 \\ 17 \\ 27 \end{pmatrix}$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

3.a. $\mathcal{P} = \operatorname{Vect}\mathscr{V} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda v_1 + \mu v_2 = \begin{pmatrix} 2\lambda+\mu \\ 3\lambda-\mu \\ -\lambda-2\mu \end{pmatrix},\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$.
[*Commentaire* : ces équations paramétriques donnant les coordonnées x, y, z d'un vecteur quelconque de $\mathcal{P}$ pourraient être utilisées pour résoudre la question 2. : en demandant à un vecteur $u\in\mathcal{P}$ de vérifier $u\cdot v_1 = 0$, cela donne $2(2\lambda+\mu)+3(3\lambda-\mu)+(-1)(-\lambda-2\mu) = 0$, ce qui équivaut à $14\lambda+\mu = 0$. On déduit donc les mêmes u qu'à ceux trouvés à la question 2.]

3.b. On résout le système précédent en inconnues λ et μ par la méthode du pivot :
$$\left\{\begin{array}{rcl} -\lambda-2\mu & = & z \\ 2\lambda+\mu & = & x \\ 3\lambda-\mu & = & y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -\lambda-2\mu & = & z \\ -3\mu & = & x+2z \\ -7\mu & = & y+3z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -\lambda-2\mu & = & z \\ -3\mu & = & x+2z \\ 0 & = & 7(x+2z)-3(y+3z) \end{array}\right.$$

On en déduit qu'il est compatible ssi sa dernière équation est satisfaite, donc ssi $7x-3y+5z=0$, ce qui fournit une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

3.c. $n = w_1 \wedge w_2 = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ où $n_1 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -49$, $n_2 = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 21$, $n_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -35$.

3.d. Une équation cartésienne pour le plan vectoriel $\mathcal{Q}$ est de la forme : $n_1x + n_2y + n_3z = 0$ donc $-49x + 21y - 35z = 0$. Remarquer qu'en la divisant par -7 on obtient exactement la même équation cartésienne que celle de $\mathcal{P}$ déduite à la question précédente, donc les plans vectoriels $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ coïncident.

4. Le rang de la famille à 4 vecteurs $\mathscr{V} \cup \mathscr{W} = \{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ est par définition le nombre de vecteurs linéairement indépendants à l'intérieur de cette famille (autrement dit, c'est le cardinal d'une sous-famille libre maximale qu'on peut extraire de la famille $\mathscr{V} \cup \mathscr{W}$). Remarquer que puisqu'on est en $\mathbb{R}^3$ (de dimension 3) et que $\mathrm{card}(\mathscr{V} \cup \mathscr{W}) = 4$ cette famille est certainement liée.
[*Commentaire* : on se rappelle du cours magistral que le rang d'une famille finie de vecteurs est la rang de la matrice qu'on forme en mettant ces vecteurs comme colonnes (ou lignes, c'est pareil) de celle-ci. En effet, pour déterminer combien de vecteurs linéairement indépendants sont dans $\mathscr{V} \cup \mathscr{W}$ on écrit une relation de liaison entre les vecteurs de cette famille : $xv_1 + yv_2 + zw_1 + tw_2 = 0$ et on constate que celle-ci revient à un système linéaire homogène à 3 équations et 4 inconnues qui s'écrit aussi sous une forme matricielle comme ${}^{\mathbf{t}}\!AX = O$ où X est le vecteur colonne des inconnues : $X = {}^{\mathbf{t}}(x, y, z, t)$, O est le vecteur-colonne origine de $\mathbb{R}^3$ et ${}^{\mathbf{t}}\!A$ est la transposée de la matrice A qu'on peut écrire en mettant les 4 vecteurs v_1, v_2, w_1, w_2 comme colonnes de celle-ci. Donc le rang de la famille de vecteurs $\mathscr{V} \cup \mathscr{W}$ est le rang du système ${}^{\mathbf{t}}\!AX = O$, qui est le même que le rang de ${}^{\mathbf{t}}\!A$ qui, lui, coïncide au rang de A, la matrice qu'on forme en mettant ces 4 vecteurs comme colonnes de celle-ci.]
On a réduit ainsi le problème au calcul de $\mathrm{rang}\, A$, qui se fait par des opérations élémentaires du type pivot de Gauss sur les lignes de A. En effet, on rappelle que ces opérations changent la matrice initiale en une matrice équivalente dans le sens, justement, de l'invariance du rang et que à la fin de l'algorithme du pivot on obtient une matrice échelonnée ayant un nombre de lignes non complètement nulles égal au rang de la matrice initiale. Le rang de $\mathscr{V} \cup \mathscr{W}$ vaut donc :

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

puisque la dernière matrice est échelonnée et a une dernière ligne (sur les 3 lignes) nulle.
Or, comme $\mathscr{V}$ (par exemple) est libre et son cardinal est 2, il fournit une famille maximale libre extraite de $\mathscr{V} \cup \mathscr{W}$, les vecteurs de $\mathscr{W}$ étant exprimables par des combinaisons linéaires de ceux de $\mathscr{V}$. On a donc $\mathrm{Vect}\mathscr{V} = \mathrm{Vect}\mathscr{V} \cup \mathscr{W}$. Le même raisonnement est valable si on change les rôles de $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$, donc on a $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}\mathscr{V} = \mathrm{Vect}\mathscr{V} \cup \mathscr{W} = \mathrm{Vect}\mathscr{W} = \mathcal{Q}$.

5. v_1 est orthogonal à u par la définition de ce dernier (voir question 2.). Aussi, n est orthogonal sur le plan vectoriel $\mathcal{Q}$ mais $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$ et $v_1 \in \mathcal{P}$, donc nécessairement v_1 est orthogonal à n. Or, tout vecteur de $\mathcal{T} = \mathrm{Vect}\{u, n\}$ est de la forme $\lambda u + \mu n$ pour une paire $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ donc le produit scalaire $v_1 \cdot (\lambda u + \mu n) = \lambda v_1 \cdot u + \mu v_1 \cdot n = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$ montre l'orthogonalité de v_1 sur $\mathcal{T}$.

6.a. De l'équation $7x - 3y + 5z = 3$ de $\mathcal{P}'$ on déduit qu'un vecteur normal à celui-ci est $-\frac{1}{7}n$. Or, $n \perp \mathcal{Q} = \mathcal{P}$. Donc, ayant un même vecteur qui leur est orthogonal, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}$ sont parallèles.
Alternativement : $\mathcal{P}' \cap \mathcal{P} = \emptyset$ puisque leur équations forment un système incompatible (car $0 \neq 3$).

6.b. Compte tenu de l'équation cartésienne de $\mathcal{P}'$, $|\overrightarrow{OM}| = \dfrac{|7 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{7^2 + (-3)^2 + 5^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{83}}$.

Exercice 4 : *(9 points)*

1. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ 3x - 6y \\ 5x - 10y \end{pmatrix}$ fournit $u(x, y) = (-x + 2y, 3x - 6y, 5x - 10y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Par la question précédente, $u(2,1) = (0,0,0)$.

3. Pour calculer le rang de A on opère sur A par des opérations élémentaires sur ses lignes comme celles de la méthode du pivot de Gauss. Ainsi, on obtient des matrices équivalentes à A, i.e. ayant un rang égal à celui de A : $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La dernière étant complètement échelonnée et ayant une seule ligne non complètement nulle, son rang vaut 1. Donc $\operatorname{rang} A = \dim \operatorname{Im}(u) = 1$. Comme l'espace d'arrivée pour u est $\mathbb{R}^3$ (de dimension 3) alors que son image est un sous-espace de dimension 1, l'inclusion vectorielle $\operatorname{Im}(u) \subset \mathbb{R}^3$ est stricte, donc u n'est pas surjective.

4. On sait que $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}\{u(e_1); u(e_2)\}$ mais par la question précédente $\dim \operatorname{Im}(u) = 1$ donc la famille $\{u(e_1); u(e_2)\}$ est liée. On gardera donc un seul vecteur de celle-ci qui fournit une base pour $\operatorname{Im}(u)$. Par exemple : $\{u(e_1)\} = \{{}^{\mathbf{t}}(-1,3,5)\}$ est une base de $\operatorname{Im}(u)$.

5. L'espace de départ pour u est $\mathbb{R}^2$ (de dimension 2). Alors, le théorème du rang : $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Ker}(u) + \dim \operatorname{Im}(u)$ donne pour notre cas : $\dim \operatorname{Ker}(u) = 2-1 = 1$. Ceci montre que l'inclusion vectorielle $\operatorname{Ker}(u) \subset \mathbb{R}^2$ est stricte, donc u n'est pas injective.

6. Comme $\dim \operatorname{Ker}(u) = 1$ toute base du noyau de u est formée d'un seul vecteur (non-nul). Or à la question 2. on a vu que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(u)$ ce qui nous fournit une base de celui-ci.

7.a. [*Commentaire* : facultativement, si Id_2 note l'application identique de $\mathbb{R}^2$ en lui-même, remarquer que le système qui donne $\mathcal{E}'$ en termes de $\mathcal{E}$ peut s'écrire aussi : $\begin{cases} \mathrm{Id}_2(e_1') = e_1' = 2e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \\ \mathrm{Id}_2(e_2') = e_2' = \quad e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \end{cases}$ $(*)$

La matrice P de passage entre la base $\mathcal{E}$ et la famille de vecteurs $\mathcal{E}'$ de $\mathbb{R}^2$ est par définition celle qu'on forme en mettant comme ses colonnes les vecteurs colonne ci-dessus. Alternativement, elle est aussi la matrice de Id_2 dans la paire de bases $(\mathcal{E}', \mathcal{E})$. Donc : $P = M_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

7.b. Comme $\operatorname{card} \mathcal{E}' = \operatorname{card} \mathcal{E} = 2$ et $\mathcal{E}$ est base de $\mathbb{R}^2$, la famille $\mathcal{E}' = (e_1'; e_2')$ est une base de $\mathbb{R}^2$ ssi elle est libre. Or ceci équivaut à $\operatorname{rang} \mathcal{E}' = \operatorname{card} \mathcal{E}' = 2$. Mais $\operatorname{rang} \mathcal{E}' = \operatorname{rang} P$ et P étant carrée, ceci revient à montrer que $\det P \neq 0$. C'est en effet, le cas, car $\det P = -3$.
Alternativement : on peut argumenter sur le système $(*)$ en disant que $\mathcal{E}' = (e_1'; e_2')$ est une base de $\mathbb{R}^2$ ssi la solution de $(*)$ vue en inconnues e_1 et e_2 est unique (car alors, tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ se décomposant en combinaison linéaire unique par rapport à la base $\mathcal{E}$, se décomposera par la suite de manière unique par rapport à $\mathcal{E}' = (e_1'; e_2')$). Or ceci a lieu quand $\det P \neq 0$.

7.c. D'après la question 2., $e_1' \in \operatorname{Ker}(u)$ et constitue à lui seul une base de ce noyau. Autrement dit : $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(e_1')$. Or, ayant montré que $\mathcal{E}' = (e_1'; e_2')$ est une base de $\mathbb{R}^2$, on a la décomposition $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Vect}(e_1') \oplus \operatorname{Vect}(e_2')$, qui donne le résultat demandé.

7.d. Nous nous trouvons dans une situation très simple : $\mathbb{R}^2$, l'espace de départ pour u, est muni de deux bases ("l'ancienne" $\mathcal{E}$ et la "nouvelle" $\mathcal{E}'$) mais dans l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$ on ne considère qu'une seule base, à savoir sa base canonique $\mathcal{F}$. Ainsi, on a les diagrammes commutatifs pour les applications, respectivement pour leur matrices dans ces bases, suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "u"] & \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathrm{Id}_2"] \arrow[ur, "u \circ \mathrm{Id}_2"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}) \arrow[r, "A"] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{F}) \\ (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}') \arrow[u, "P = M_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_2)"] \arrow[ur, "B"] & \end{tikzcd}$$

$$u \circ \mathrm{Id}_2 = u \qquad \Longleftrightarrow \qquad AP = B$$

Alternativement, soit $x \in \mathbb{R}^3$ et $y \in \mathbb{R}^2$ tel que $u(x) = y$. Soit X la matrice-colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}$ et X' la matrice-colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}'$. Alors $X = PX'$. Soit Y la matrice-colonne des coordonnées de y dans la base $\mathcal{F}$. D'après $u(x) = y$,

$Y = AX$ et $Y = BX'$. Donc, pour tout X', $APX' = BX'$. Donc $AP = B$.

En conclusion : $B = AP = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 9 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 : *(5 points)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Pour montrer qu'on a l'inclusion (en tant que sous-espaces vectoriels de E) :
$$(F \cap G) + (G \cap H) + (H \cap F) \subset (F + G) \cap (G + H) \cap (H + F) \qquad (*)$$
noter que les intersections et les sommes de sev sont bien des ev, donc les deux membres de l'inclusion $(*)$ sont bien des sev de E.
Si $x \in (F \cap G) + (G \cap H) + (H \cap F)$ il existent $f \in F \cap G$, $g \in G \cap H$ et $h \in H \cap F$ tels que $x = f + g + h$.
Alors
   - $f + g \in G$ et $h \in H \cap F \Longrightarrow x \in G + H$ et $x \in G + F \Longleftrightarrow x \in (F + G) \cap (G + H)$,
   - $g + h \in H$ et $f \in F \Longrightarrow x \in H + F$

   En conclusion, $x \in (F + G) \cap (G + H) \cap (H + F)$.
2. NON. Par exemple, soit $F \subset G \subset H$. Alors $(*) \Leftrightarrow F + G + F \subset G \cap H \cap H \Leftrightarrow G \subset G$, fausse si "$\subset$" était stricte.
3. Notons par O l'espace nul de E (le singleton formé par l'origine de E). Par hypothèse on a $F + G = F \oplus G$, $G + H = G \oplus H$ et $H + F = H \oplus F$, donc $O = F \cap G = G \cap H = H \cap F$ donc le membre de gauche de $(*)$ vaut O.
Par hypothèse aussi, $E = F \oplus H$ donc le membre de gauche de $(*)$ vaut $(F \oplus G) \cap (G \oplus H) \cap E$.
Donc $(*)$ devient : $O \subset (F \oplus G) \cap (G \oplus H)$ $(**)$.
[*Commentaire* : concernant le membre de droite de $(**)$ on peut se demander si l'on peut aller plus loin, car notre intuition "ensembliste" (selon laquelle "$\oplus$" joue le rôle de l'union disjointe d'ensembles) nous donne l'impression qu'on pourrait avoir $(F \oplus G) \cap (G \oplus H) = G$. Or, dans cette présumée égalité, si l'inclusion "$\supset$" est évidente, l'inclusion inverse est fausse en général. En effet :
   - Soit $E = \mathbb{R}^3$, H un plan vectoriel et F et G deux droites vectorielles, tous ne s'intersectant qu'en origine. Alors nos hypothèses sont satisfaites, par contre comme $G \oplus H = \mathbb{R}^3$ on a $(F \oplus G) \cap (G \oplus H) = F \oplus G$ qui, étant un plan, inclut strictement la droite G.
   - Plus généralement (pour la dimension finie cependant), on peut utiliser le théorème de Grassmann : $\dim\big((F\oplus G)\cap(G\oplus H)\big) = \dim(F\oplus G)+\dim(G\oplus H)-\dim\big((F\oplus G)+(G\oplus H)\big)$ $= \dim F + 2\dim G + \dim H - \dim(F+G+H)$. Or, $\dim F + \dim H = \dim(F \oplus H) = \dim E = \dim(F + G + H)$. Donc finalement $\dim\big((F \oplus G) \cap (G \oplus H)\big) = 2\dim G$.
   - Remarquer que ce bilan de dimension pourrait nous donner l'impression qu'un sev de E, ici $(F \oplus G) \cap (G \oplus H)$, pourrait avoir une dimension plus grande que celle de E car a priori on pourrait avoir $2\dim G > \dim E$ mais en réalité ceci est interdit par les hypothèses de somme directe entre les paires formées avec les F, G et H et surtout par $E = F \oplus H$ (je vous laisse penser pourquoi).]
4. NON. Remarquer déjà que si au moins une des deux sommes du membre de gauche de $(*)$ est directe, par exemple $(F\cap G)+(G\cap H) = (F\cap G)\oplus(G\cap H)$ alors $O = (F\cap G)\cap(G\cap H) = F\cap G\cap H$.
Ceci nous suggère un exemple simple : $E = \mathbb{R}^3$ et F, G et H sont 3 droites non-confondues deux à deux, autrement dit, chacune ayant un vecteur directeur f, resp. g, resp. h de sorte que la famille de vecteurs $\{f, g, h\}$ soit libre (donc base de $\mathbb{R}^3$). Remarquer que ceci peut s'écrire aussi comme : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G \oplus H$.
Dans ce cas, le membre de gauche de $(*)$ vaut O.
Aussi, dans le membre de droite on a $(F + G) \cap (G + H) = G = \mathrm{Vect}\{g\}$ et $H + F = \mathrm{Vect}\{h, f\}$.
Mais puisque $\{f, g, h\}$ est libre, $\mathrm{Vect}\{g\} \cap \mathrm{Vect}\{h, f\} = O$ ce qui montre que le membre de droite de $(*)$ vaut également O et on a égalité dans $(*)$.