Examen d'Algèbre Linéaire

Durée : 2h30

Les documents, les smartphones et smartwatch et les calculatrices ne sont pas autorisés

Les exercices sont indépendants. Le barème (sur 35 pts.) est donné à titre indicatif.

Bien soigner la rédaction. ***Toute réponse sans justification vaut zéro***

Au sein de chaque exercice, les questions sont souvent indépendantes, vous pouvez donc les traiter séparément.

Notations & conventions :

1. Les vecteurs écrits dans une base seront seulement écrits comme vecteurs-colonne.
2. Pour E et F deux espaces vectoriels sur un corps de scalaires $\mathbb{K}$ et $f : E \to F$ linéaire, si $G \subseteq E$ et $H \subseteq F$ sont des sous-espaces vectoriels, on rappelle les notations :
   (a) $f(G) = \{y \in F \mid \exists x \in G \text{ t.q. } f(x) = y\}$ est l'image (directe) de G par f.
   En particulier, l'image de f est $\operatorname{Im}(f) = f(E)$.
   (b) $f^{-1}(H) = \{x \in E \mid f(x) \in H\}$ est l'image réciproque de H par f.
   En particulier, le noyau de f est $\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\})$.

Exercice 1 : *(4 points)*

Soit le sous ensemble de $\mathbb{R}^4$: $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ 2x - z + t & = & 0 \end{array}\right. \quad (*) \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

2. Résoudre le système $(*)$ par la méthode du pivot (de Gauss).

3. En déduire une base de F.

Exercice 2 : *(6 points)*

Soit m et λ deux paramètres réels et soit $(S_{m,\lambda})$: $\left\{\begin{array}{rcl} m^2x + my + z & = & \lambda^2 \\ mx + y + m^2z & = & \lambda \\ x + m^2y + mz & = & 1 \end{array}\right.$ la famille de systèmes linéaires indexés par ces deux paramètres.

1. Calculer le déterminant $\Delta_m = \begin{vmatrix} m^2 & m & 1 \\ m & 1 & m^2 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix}$ et montrer qu'il s'écrit sous la forme $-(m^3-1)^2$.

2. Sachant que $m^3 - 1 = (m-1)(m^2+m+1)$, montrer que $(S_{m,\lambda})$ admet une solution unique si et seulement si $m \neq 1$.

Justifier que cette solution unique s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ où A est une matrice que l'on précisera.

3. Soit $m = 1$.

3.a. Montrer que le système $(S_{1,\lambda})$ est incompatible (n'admet pas de solution) sauf pour $\lambda = 1$.

3.b. Résoudre le système pour $\lambda = 1$, en trouvant une équation cartésienne puis des équations paramétriques de l'ensemble $\mathcal{S}_{1,1}$ de ses solutions.

Exercice 3 : *(11 points)*

Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ écrits par rapport à un repère orthonormal fixé.

1. Montrer que les familles de vecteurs $\mathscr{V} = \{v_1, v_2\}$ et $\mathscr{W} = \{w_1, w_2\}$ sont des familles libres.

2. Soit $\mathcal{P} = \operatorname{Vect}\mathscr{V}$, à savoir le plan *vectoriel* engendré par les vecteurs v_1 et v_2.
Trouver tous les vecteurs u de $\mathcal{P}$ qui sont orthogonaux à v_1.

Tournez la page s.v.p. ↪

3. Soit $\mathcal{Q} = \mathrm{Vect}\mathscr{W}$, à savoir le plan *vectoriel* engendré par les vecteurs w_1 et w_2.
On se propose de montrer par des moyens *géométriques* que $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$, à savoir que les plans vectoriels engendrés par les familles $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ coïncident.

3.a. Écrire un système d'équations paramétriques pour $\mathcal{P}$.

3.b. En déduire qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $7x - 3y + 5z = 0$.

3.c. Calculer les coordonnées du vecteur produit vectoriel $w_1 \wedge w_2$, qu'on notera n.

3.d. En déduire une équation cartésienne pour le plan vectoriel $\mathcal{Q}$. Conclure.

4. Calculer le rang de la famille à 4 vecteurs $\mathscr{V} \cup \mathscr{W}$ et justifier par des moyens *algébriques* que $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$.

5. Justifier l'orthogonalité du vecteur v_1 sur le plan vectoriel $\mathcal{T} = \mathrm{Vect}\{u, n\}$ engendré par les vecteurs u et n ont été désignés dans les questions précédentes.

6. Soit $\mathcal{P}'$ un plan affine de l'espace, donné par une équation cartésienne du type : $7x - 3y + 5z = 3$

6.a. Justifier que $\mathcal{P}'$ est parallèle à $\mathcal{P}$.

6.b. Soit M le projeté orthogonal de l'origine O sur $\mathcal{P}'$. Trouver la longueur du segment OM (i.e. le module du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

Exercice 4 : *(9 points)*
Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{E} = (e_1; e_2)$ et $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{F} = (f_1; f_2; f_3)$.
Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice $M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}(u)$ dans la paire de bases canoniques est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver l'expression de u, i.e. la façon dont u agit sur une paire (x, y) quelconque de $\mathbb{R}^2$.
Autrement dit, en posant $u(x, y) = (a, b, c)$ trouver l'expression des a, b et c en fonction de x, y.

2. Calculer $u(2, 1)$.

3. Calculer le rang de A et en déduire la dimension de $\mathrm{Im}(u)$, l'espace image de u.
L'application u est-elle surjective ?

4. Déterminer $\mathrm{Im}(u)$ en donnant une base de celui-ci.

5. Trouver la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$, le noyau de u.
L'application u est-elle injective ?

6. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ en donnant le(s) vecteur(s) d'une de ses bases.

7. On définit à présent une nouvelle famille de vecteurs $\mathcal{E}' = (e'_1; e'_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par : $\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + e_2 \\ e'_2 = \ \ e_1 - e_2 \end{cases}$.

7.a. Donner la matrice P de passage entre la base $\mathcal{E}$ et la famille de vecteurs $\mathcal{E}'$ de $\mathbb{R}^2$.

7.b. En déduire que $\mathcal{E}' = (e'_1; e'_2)$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$.

7.c. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Vect}(e'_2)$.

7.d. Notons par B la matrice $M_{\mathcal{E}'\mathcal{F}}(u)$ de u dans la paire $\mathcal{E}', \mathcal{F}$ de bases "nouvelles".
Justifier brièvement l'égalité : $B = AP$ et en déduire B.

Exercice 5 : *(5 points)*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer qu'on a l'inclusion (en tant que sous-espaces vectoriels de E) suivante :

$$(F \cap G) + (G \cap H) + (H \cap F) \subset (F + G) \cap (G + H) \cap (H + F) \qquad (*)$$

2. Cette inclusion est-elle stricte ?

3. Supposons que les sommes dans le membre de droite de l'inclusion de $(*)$ sont directes et que H et F sont supplémentaires dans E. Donner dans ce cas explicitement les deux membres de $(*)$ et écrire que devient $(*)$ dans ce cas.

4. L'inclusion est-elle stricte dans le cas où on supposait que les sommes du membre de gauche de $(*)$ étaient directes ?