CORRIGÉ de l'Examen d'Algèbre Linéaire

Remarque : Ce corrigé a été rédigé dans un esprit pédagogique, ce qui explique sa longueur : on trouvera, ici et là, un excès d'explications, d'observations, de solutions alternatives, etc... qui ne sont pas toutes forcément nécessaires en conditions d'examen.

Exercice 1 :

1. Le produit scalaire : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = 0$ i.e. $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

2.a) Si O est l'origine de l'espace et $M = M(x, y, z)$ est un point quelconque du plan $\mathcal{P}$, on a : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$ ce qui équivaut au système d'équations paramétriques du plan $\mathcal{P}$: (P) $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3 + 5\lambda + \mu \\ y & = & 1 + 2\lambda - 3\mu \\ z & = & 1 + \lambda + \mu \end{array} \right.$

2.b) Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ se déduit de (P) en éliminant les paramètres λ et μ :

$$(\mathrm{P}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mu + 5\lambda & = & x - 3 \\ -3\mu + 2\lambda & = & y - 1 \\ \mu + \lambda & = & z - 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mu + 5\lambda & = & x - 3 \\ 17\lambda & = & 3x + y - 10 \\ -4\lambda & = & -x + z + 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mu + 5\lambda & = & x - 3 \\ 17\lambda & = & 3x + y - 10 \\ 0 & = & 5x - 4y - 17z + 6 \end{array} \right.$$

2.c) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} =: \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ où $n_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, $n_2 = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$, $n_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -17$.

2.d) Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme : $n_1 x + n_2 y + n_3 z + \gamma = 0$ où γ résulte en posant la condition $A \in \mathcal{P} \iff 5 \cdot 3 + (-4) \cdot 1 + (-17) \cdot 1 + \gamma = 0 \iff \gamma = 6$.

3.a) Si $O \in \mathcal{D}$ et $N = N(x, y, z)$ est un point quelconque de la droite $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$, on a : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{u}$ qui équivaut à un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$: (D) $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 5\lambda \\ y & = & -4\lambda \\ z & = & -17\lambda \end{array} \right.$

3.b) Un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ se déduit de (D) en éliminant le paramètre λ (pivot de Gauss) :

$$(\mathrm{D}) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 5\lambda & = & x \\ 0 & = & 4x + 5y \\ 0 & = & 17x + 5z \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 5y & = & 0 \\ 17x \qquad + 5z & = & 0 \end{array} \right. \text{ est le système recherché.}$$

Exercice 2 : Notons par $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ des solutions (x, y) du système linéaire

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & \lambda \\ cx + dy & = & \mu \end{array} \right., \text{ où } (a, b, c, d, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^6.$$

1) $\mathcal{S} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (S) \left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & \lambda \\ cx + dy & = & \mu \end{array} \right. \right\}$. L'ensemble vide n'est jamais un espace vectoriel. D'où une première condition nécessaire : $\mathcal{S} \neq \emptyset$ i.e. (S) doit être compatible. Mais par pivot de Gauss on montre que cette condition se pose en général en termes de toutes les constantes $(a, b, c, d, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^6$ donc non seulement en termes de $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Mais, même dans le cas où $\mathcal{S} \neq \emptyset$ une seconde condition nécessaire s'impose : l'appartenance de l'origine à $\mathcal{S}$: $(0, 0) \in \mathcal{S}$. En remplaçant ceci dans (S) on obtient la condition nécessaire demandée : $\lambda = \mu = 0$.

2) Pour le cas $\lambda = \mu = 0$ notons (S_0) le système homogène correspondant et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble de ses solutions. Alors $\mathcal{S}_0$ est sev de $\mathbb{R}^2$ ssi $\forall ((x, y), (x', y')) \in \mathcal{S}_0^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ on a $(x, y) + \alpha(x', y') \in \mathcal{S}_0$. Or, cette dernière équivaut à $(x + \alpha x', y + \alpha y') \in \mathcal{S}_0$ donc à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(x + \alpha x') + b(y + \alpha y') & = & 0 \\ c(x + \alpha x') + d(y + \alpha y') & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (ax + by) + \alpha(ax' + by') & = & 0 \\ (cx + dy) + \alpha(cx' + dy') & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 0 + \alpha \cdot 0 & = & 0 \\ 0 + \alpha \cdot 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

ce qui est une tautologie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, donc $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 :

1. Dans un ev il n'y a pas de famille libre de vecteurs dont le nombre de ses éléments (son cardinal) dépasse la dimension de l'espace.
Dans notre cas $\operatorname{card}\mathcal{A} = 4 > 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc $\mathcal{A}$ est forcément lié.

2. Sachant que $\operatorname{card}\mathcal{B} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ est base ssi il est libre *ou* ssi $\operatorname{Vect}\mathcal{B} = \mathbb{R}^3$. Or, il est toujours plus facile de vérifier que $\mathcal{B}$ est libre : $\forall (\lambda, \mu, \delta) \in \mathbb{R}^3,\ \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \delta\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \lambda = \mu = \delta = 0$. L'hypothèse du membre de gauche de cette implication équivaut à une système scalaire 3×3 homogène d'équations linéaires en inconnues λ, μ et δ. Ce système admet une solution unique (forcement la solution triviale!) ssi le déterminant de ses coefficients est non-nul. Celui-ci est :

$$\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{17}{7} \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-7)\cdot\frac{17}{7} = 17 \neq 0.$$

Observations : Ci dessus nous avons calculé le déterminant en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de celui-ci (du type pivot de Gauss).
Si ce calcul avait été fait sur la matrice $M = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{w})$ de la famille de vecteurs de $\mathcal{B}$ on aurait trouvé qu'elle équivaut à une matrice 3×3 échelonnée de rang $= 3$, donc $\operatorname{rang}\mathcal{B} = 3 = \operatorname{card}\mathcal{B}$ ce qui constitue une preuve alternative que $\mathcal{B}$ est est libre.
En conclusion, $\mathcal{B}$ est est libre et donc base de $\mathbb{R}^3$ puisque $\operatorname{card}\mathcal{B} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

3. Tout sous-famille d'une famille libre de vecteurs est libre aussi. Donc, puisque $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est libre, alors $\mathcal{C}$ est libre aussi.
Pour $\mathcal{D}$ on ne peut utiliser le même argument, car $\mathcal{D} \not\subseteq \mathcal{B}$. Par contre, puisque $\operatorname{card}\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{D}$ serait lié si ses 2 vecteurs seraient proportionnels. Or, ceci est faux, car $\frac{1}{1} = 1 \neq -1 = \frac{2}{-2}$. Alternativement, comme dit dans l'Observation précédente, par pivot de Gauss il est facile de montrer que $\operatorname{rang}\mathcal{D} = 2 = \operatorname{card}\mathcal{D}$ i.e. $\mathcal{D}$ est est libre.

4.a) (i) $C = \mathbb{R}^3$ est faux, car $\operatorname{card}\mathcal{C} = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc $\mathcal{C}$ ne peut engendrer $\mathbb{R}^3$.
(ii) Puisque $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ on a $B \subseteq A$. Mais $\mathcal{B}$ est base de $\mathbb{R}^3$ donc $B := \operatorname{Vect}\mathcal{B} = \mathbb{R}^3 \supseteq \operatorname{Vect}\mathcal{A} =: A$. Donc on a bien $A = B$ et ces deux espaces coïncident avec $\mathbb{R}^3$.

4.b) On a bien $C + D = \mathbb{R}^3$.
En effet, puisque $\mathcal{B}$ est base de $\mathbb{R}^3$, tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ se décompose (d'une façon unique) comme $\overrightarrow{x} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}$ où $\overrightarrow{c} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \in C$ et $\overrightarrow{d} = \gamma\overrightarrow{w} \in D$. Donc $\overrightarrow{x} \in C + D$.

4.c) Non, la somme $C + D$ n'est pas directe.
En effet, si elle l'était, l'union d'une base de C et d'une base de D devrait être une famille libre. Or, d'après ce qui précède, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont libres et engendrent C et D respectivement, donc sont bases de C et D respectivement. Or, la famille $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \mathcal{A}$ est liée.

Exercice 4 :

1. $$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -2x + y - 4z \\ 3x - 2y + 5z \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}$$

Donc pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $u(x, y, z) = (-2x + y - 4z, 3x - 2y + 5z)$.

2. On calcule le rang de A en effectuant sur A des "transformations élémentaires" du type pivot de Gauss, suite auxquelles on obtient des matrices équivalentes à A (donc du même rang que celui de A) : $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$. Cette dernière étant complètement échelonnée et ayant 2 lignes non complètement nulles, son rang est 2, donc $\dim \operatorname{Im}(u) = 2$ et comme $\operatorname{Im}(u)$ est sev de la même dimension que l'espace $\mathbb{R}^2$ d'arrivée de u, on a $\operatorname{Im}(u) = \mathbb{R}^2$ donc u est surjective.

3. Par le Théorème du rang : $\dim \operatorname{Ker}(u) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im}(u) = 3 - 2 = 1$ donc u n'est pas injective.

4. D'après 1) et la définition du noyau de u, un triplet $(x, y, z) \in \operatorname{Ker}(u)$ ssi

$$\left\{\begin{array}{ll} -2x+y-4z & =0 \\ 3x-2y+5z & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} -2x+y-4z & =0 \\ y+2z & =0 \end{array}\right. \overset{z=\lambda\in\mathbb{R}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -3\lambda \\ y & = & -2\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}.$$

Or, $\begin{pmatrix} -3\lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

5. *Observation* : Pour résoudre les questions 5.a) à 5.d) on peut procéder d'une manière "classique" (ou... "à base des définitions") en les résolvant une par une, ou bien on peut procéder d'une manière plus globale, en les résolvant toutes d'un coup...

Pour l'abord "classique" on commence par remarquer que, bien que les familles de vecteurs $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ ne soient a priori ni libres ni génératrices de $\mathbb{R}^3$, respectivement de $\mathbb{R}^2$, puisqu'il s'agit de familles de 3 (respectivement 2) vecteurs dans un espace de dimension 3 (respectivement 2), il suffira de prouver que l'on a à faire à des familles libres.

5.a) Pour $\mathcal{F}'$: $af_1' + bf_2' = 0 \Leftrightarrow (a+b)f_1 + (a-b)f_2 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \\ a-b & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = b = 0.$

5.b) Pareillement, pour $\mathcal{E}'$ une égalité du type $ae_1' + be_2' + ce_3' = 0$, équivaut à :

$$(b+c)e_1 + (a+c)e_2 + (a+b)e_3 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcl} & b+c & = & 0 \\ a & +c & = & 0 \\ a+b & & = & 0 \end{array}\right. \overset{Obs.}{\iff} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui a solution unique $a = b = c = 0$ car $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$

Donc la famille $\mathcal{E}' = (e_1', e_2', e_3')$ est libre.

5.c) Le système (1) de l'énoncé fournit l'écriture des éléments de $\mathcal{E}'$ en termes de ceux de $\mathcal{E}$:

$$e_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}},\ e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}\ e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \text{ d'où par définition : } P := P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.d) Le système (2) de l'énoncé fournit l'écriture des éléments de $\mathcal{F}'$ en termes de ceux de $\mathcal{F}$:

$$f_1' = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}},\ f_2' = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}} \text{ d'où par définition : } Q := P_{\mathcal{F}\mathcal{F}'} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alternativement, pour résoudre les questions 5.a) à 5.d) d'un seul coup, on aurait pu voir les systèmes (1) et (2) de l'énoncé (qui définissent les familles de vecteurs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ respectivement) comme des systèmes d'équations en inconnues e_1, e_2, e_3 et f_1, f_2 respectivement. Or, ceux-ci sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement, qui, une fois les systèmes résolus, auront une écriture *unique* par rapport aux éléments des familles $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ respectivement *si et seulement si* ces familles aussi sont des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement. Ceci montre que, puisque

$$(1) \left\{\begin{array}{l} e_1' = \qquad e_2 + e_3 \\ e_2' = e_1 \qquad + e_3 \\ e_3' = e_1 + e_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (2) \left\{\begin{array}{rcl} f_1' & = & \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \\ & & \\ f_2' & = & \frac{1}{2}(f_1 - f_2). \end{array}\right. \Leftrightarrow Q \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix},$$

les familles de vecteurs $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement, *si et seulement si* les matrices P et Q sont inversibles. Et dans ce cas, elles sont les matrices de passage entre les "bases anciennes" $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ et les bases nouvelles $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ respectivement. Il ne reste donc plus qu'à vérifier que les déterminants de ces matrices sont non-nuls, ce qui a été fait auparavant.

5.e) On a vu que le système d'équations (2) équivaut à $Q\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix}$ et puisque $\det Q = 1 \neq 0$, Q est inversible et l'équation précédente équivaut à $Q^{-1}\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$. Or, celle-ci est l'écriture matricielle du système (2) après avoir été résolu en inconnues f_1 et f_2. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1 + f_2 & = & 2f_1' \\ f_1 - f_2 & = & 2f_2' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} f_1 + f_2 & = & 2f_1' \\ -2f_2 & = & 2(f_2' - f_1') \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} f_1 & = & f_1' + f_2' \\ f_2 & = & f_1' - f_2' \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

donc la matrice de passage de $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}^2$ est $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5.f) Nous sommes dans la situation la plus générale : $\mathbb{R}^3$, l'espace de départ pour u, est muni de deux bases ("l'ancienne" $\mathcal{E}$ et la "nouvelle" $\mathcal{E}'$) et dans l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^2$ on considère aussi deux bases, à savoir "l'ancienne" $\mathcal{F}$ et "la nouvelle" $\mathcal{F}'$. Ainsi, on a les diagrammes commutatifs pour les applications, respectivement pour leur matrices dans ces paires de bases, suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "u"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\mathrm{Id}"] \arrow[r, "\mathrm{Id} \circ u \circ \mathrm{Id}"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}) \arrow[r, "A = M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{F}) \arrow[d, "Q^{-1} = M_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}(\mathrm{Id})"] \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}') \arrow[u, "P = M_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{Id})"] \arrow[r, "B = M_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u)"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{F}') \end{tikzcd}$$

$$u = \mathrm{Id} \circ u \circ \mathrm{Id} \qquad \Longleftrightarrow \qquad B = Q^{-1}AP$$

Pour trouver B on n'a plus qu'à calculer le produit $Q^{-1}AP$ des matrices trouvées auparavant :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 :

a) Montrons "$\subseteq$" : Si $x \in f^{-1}\big(f(H)\big)$ alors $f(x) \in f(H)$, donc il existe $h \in H$ tel que $f(x) = f(h)$ ce qui équivaut à $f(x) - f(h) = 0$ et par linéarité de f : $f(x-h) = 0$, donc $x - h \in \mathrm{Ker}(f)$, d'où $x \in H + \mathrm{Ker}(f)$.

b) Montrons "$\supseteq$" : Si $x \in H + \mathrm{Ker}(f)$ alors il existent $h \in H$ et $k \in \mathrm{Ker}(f)$ tels que $x = h + k$, d'où $f(x) = f(h) + f(k) = f(h) + 0 = f(h) \in f(H)$, donc $x \in f^{-1}\big(f(H)\big)$.

Note : La vidéo de la preuve demandée a été déposée par Alexandre Mizrahi sur la plateforme pédagogique ENT et était disponible presque 2 mois avant l'examen, à l'adresse

`https://videotheque.u-cergy.fr/watch.php?id=404`

Cette vidéo a été visionnée de nombreuses fois... et elle y est toujours.