Examen d'Algèbre Linéaire

Durée : 2h30

Les documents, les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés

Les exercices sont indépendants. Le barème (sur 30 pts.) est donné à titre indicatif.

Bien soigner la rédaction. Toute réponse sans justification vaut zéro

Notations & conventions :

1. Les vecteurs écrits dans une base seront seulement écrits comme vecteurs-colonne.
2. Pour E et F deux espaces vectoriels sur un corps de scalaires $\mathbb{K}$ et $f : E \to F$ linéaire, si $G \subseteq E$ et $H \subseteq F$ sont des sous-espaces vectoriels, on rappelle les notations :
   (a) $f(G) = \{y \in F \mid \exists\, x \in G \text{ t.q. } f(x) = y\}$ est l'image (directe) de G par f.
   En particulier, l'image de f est $\mathrm{Im}(f) = f(E)$.
   (b) $f^{-1}(H) = \{x \in E \mid f(x) \in H\}$ est l'image réciproque de H par f.
   En particulier, le noyau de f est $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\})$.

Exercice 1 : (6 points)

1. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ (muni d'un repère orthonormal fixé) les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

2. Soit le point $A = (3, 1, 1)$ dans l'espace et notons par $\mathcal{P}$ le plan dans l'espace dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et qui contient le point A.

2.a) Donner un système d'équations paramétriques du plan $\mathcal{P}$.

2.b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $5x - 4y - 17z + 6 = 0$.

2.c) Calculer (à l'aide de sa définition) le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, qu'on notera par $\overrightarrow{n}$.

2.d) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

3. Notons par O l'origine de l'espace et par $\mathcal{D}$ la droite (dans l'espace) orthogonale au plan $\mathcal{P}$ et qui passe par l'origine.

3.a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$.

3.b) En déduire un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$.

Exercice 2 : (3 points)

Notons par $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ des solutions (x, y) du système linéaire (S) $\left\{\begin{array}{lcl} ax + by & = & \lambda \\ cx + dy & = & \mu \end{array}\right.$,
où $(a, b, c, d, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^6$.

1. Donner, en termes de λ et μ seulement, une condition nécessaire pour que $\mathcal{S}$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que, sous cette condition, $\mathcal{S}$ est, effectivement, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 : (8 points)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soit les vecteurs : $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{t} = \begin{pmatrix}1\\11\\-2\end{pmatrix}$.

1. La famille de vecteurs $\mathcal{A} = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}; \overrightarrow{t})$ est-elle libre ? Justifier.

2. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Les familles de vecteurs $\mathcal{C} = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ et $\mathcal{D} = (\overrightarrow{w}; \overrightarrow{t})$ sont-elles libres ?

4. Notons par A, B, C et D les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés par les familles de vecteurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ respectivement (donc $A = \mathrm{Vect}\,\mathcal{A}$, etc...). Décider (avec justification !) si :

4.a) (i) $C = \mathbb{R}^3$; (ii) $A = B$;

4.b) La somme de sous-espaces vectoriels $C + D$ vaut-elle $\mathbb{R}^3$? (donc a-t-on : $C + D = \mathbb{R}^3$?)

4.c) Cette somme est-elle directe ? Autrement dit : a-t-on $C + D = C \oplus D$?

Tournez la page s.v.p. $\hookrightarrow$

Exercice 4 : (10 points)
Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$.
Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice $M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}(u)$ dans la paire de bases canoniques est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Indiquer la façon dont u agit sur un triplet (x, y, z) quelconque de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, trouver l'expression de a et b en fonction de x, y, z tels qu'on ait $u(x, y, z) = (a, b)$.
2. Calculer le rang de A. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(u)$, puis déterminer l'espace image de u. L'application u est-elle surjective ?
3. Trouver la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$, le noyau de u. L'application u est-elle injective ?
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ en donnant le(s) vecteur(s) d'une de ses bases.
5. On définit à présent deux nouvelles familles de vecteurs $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$(1) \quad \begin{cases} e'_1 = \phantom{e_1 +{}} e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 \phantom{{}+ e_2} + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \begin{cases} f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \\ \\ f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2). \end{cases}$$

5.a) Montrer que $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

5.b) Montrer que $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5.c) Trouver la matrice P de passage entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de $\mathbb{R}^3$.

5.d) Trouver la matrice Q de passage entre les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ de $\mathbb{R}^2$.

5.e) Déterminer Q^{-1}, matrice de passage de $\mathcal{F}'$ à $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}^2$. (Indication : on pourra résoudre le système d'équations (2) en inconnues f'_1 et f'_2 et en déduire ainsi Q^{-1} du système résultant).

5.f) Notons par B la matrice $M_{\mathcal{E}'\mathcal{F}'}(u)$ de u dans la paire $\mathcal{E}', \mathcal{F}'$ de bases "nouvelles".
Justifier brièvement l'égalité : $B = Q^{-1}AP$ et en déduire B.

Exercice 5 : (3 points)
Si $H \subseteq E$ est sous-espace vectoriel et si $f : E \to F$ est une application linéaire entre les espaces vectoriels E et F, montrer l'égalité de sous-espace vectoriel :

$$f^{-1}\big(f(H)\big) = H + \mathrm{Ker}(f).$$

(Indication : une égalité est dans ce cas une double inclusion de sous-espaces vectoriels)