UCP - L1 - S1 2ème SESSION

CORRIGÉ de l'EXAMEN d'ALGÈBRE LINÉAIRE

EXERCICE 1 :

(1) Produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot(-6)+3\cdot 4+0\cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

(2) a) Tout vecteur $\vec{w}\in\mathcal{P}$ de coordonnées (x,y,z) s'écrit $\vec{w}=\vec{w}(t,s)=\vec{OA}+t\vec{u}+s\vec{v}$ $\forall(t,s)\in\mathbb{R}^2$, d'où

$$\begin{cases} x = 1+2t-6s \\ y = 1+3t+4s \\ z = 1 \quad\quad\; + s \end{cases} \quad \forall (t,s)\in\mathbb{R}^2$$

est un système (S) d'équations paramétriques de $\mathcal{P}$.

b) On déduit une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ en éliminant les paramètres t et s du système (S) ci-dessus :

$$(S)\Leftrightarrow \begin{cases} s = z-1 \\ 2t-6s = x-1 \\ 3t+4s = y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = z-1 \\ 2t = x+6z-7 & |\times 3 \\ 3t = y-4z+3 & |\times(-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = z-1 \\ 2t = x+6z-7 \\ \boxed{0 = 18z+3x-21-2y+8z-6} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{3x-2y+26z=27}$$

une éq. cartésienne de $\mathcal{P}$

(3) a) On applique la déf. du prod. vect. de 2 vecteurs à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on a :

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-6\\4\\1\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \begin{vmatrix}3&4\\0&1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2&-6\\0&1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}2&-6\\3&4\end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\26\end{pmatrix} \overset{\text{not}}{=} \vec{n}$$

b) Le vecteur $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ (par déf. du prod. vect.) d'où (voir CM.) une éq. cartésienne de $\mathcal{P}$ est : $3x-2y+26z+\alpha=0$ où α est déduit de : $A=A(1,1,1)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow 3\cdot 1-2\cdot 1+26\cdot 1+\alpha=0$ $\Leftrightarrow \alpha=-27$. Donc une éq. de $\mathcal{P}$ est : $\boxed{3x-2y+26z=27}$

EXERCICE 2 :

(1) $\mathcal{A}$ ne peut être libre car $\text{card}\,\mathcal{A}=4>3=\dim\mathbb{R}^3$ et ds un e.v. (ici : $\mathbb{R}^3$) il n'y a pas de syst libre de vecteurs ayant plus de vecteurs que toute base de l'e.v.

(2) $\text{card}\,\mathcal{B}=3=\dim\mathbb{R}^3$ et ce bilan "de dimension" nous dit que $\mathcal{B}=\text{base de }\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est libre $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ engendre $\mathbb{R}^3$.
On choisit de vérifier si $\mathcal{B}$ est syst. libre de vecteurs ~~et~~ ce qui voudrait dire : $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$ ce qui voudrait dire que le syst. d'éq. ci-dessous admet uniquement la solution triviale :

$$\begin{cases} 2\alpha-\beta+\gamma=0 \\ 3\alpha-2\beta \quad\quad =0 \\ -\alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases} \underset{\text{de Gauss}}{\overset{\text{Pivot}}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 2\alpha-\beta+\gamma=0 \\ \left(\frac{3}{2}-2\right)\beta-\frac{3}{2}\gamma=0 \\ \left(-\frac{1}{2}+1\right)\beta+\left(\frac{1}{2}+1\right)\gamma=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta+\gamma=0 \\ -\frac{1}{2}\beta-\frac{3}{2}\gamma=0 \\ \frac{1}{2}\beta+\frac{3}{2}\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta+\gamma=0 \\ \beta+3\gamma=0 \end{cases}$$

Le système a donc le rang $=2$ et non pas 3 : c'est un système ayant 3 inconnues et seulement 2 équations, donc il admet une infinité de solutions et non pas seulement la solution $\alpha=\beta=\gamma=0$.
Conclusion : $\mathcal{B}$ n'est pas libre donc pas base de $\mathbb{R}^3$.

(3) Le calcul précédent nous donne une information : parmi les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ il y en a deux qui forment un système libre (car le rang du système précédent était $=2$). La question est :

s'agit-il de la paire $\vec{u},\vec{v}$ précisément ?
Or, si $\mathcal{C} = (\vec{u},\vec{v})$ était lié, les coord. de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ devraient être proportionnelles, ce qui n'est pas le cas, car : $\frac{2}{-1} \neq \frac{3}{-2}$.
Conclusion : $\mathcal{C} = (\vec{u},\vec{v})$ est libre (mais pas une base de $\mathbb{R}^3$ puisque $\operatorname{card}\mathcal{C} = 2 < 3 = \dim\mathbb{R}^3$)

(4) On commence par $\mathbf{C} := \operatorname{Vect}\mathcal{C}$ et comme $\mathcal{C}$ est libre, $\mathcal{C}$ est base de $C \Rightarrow \boxed{\dim C = \operatorname{card}\mathcal{C} = 2}$
Puis $B := \operatorname{Vect}\mathcal{B}$: Mais $\mathcal{B}$ n'est pas libre et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ donc $C = \operatorname{Vect}\mathcal{C} = \operatorname{Vect}\mathcal{B} = B$ d'où $\boxed{\dim B = 2.}$
Enfin, concernant $A := \operatorname{Vect}\mathcal{A}$: certes, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ mais m̂ si $\mathcal{B}$ n'est pas libre, $\mathcal{A}$ pourrait avoir une autre sous-famille à 3 vecteurs libre. Par ex. $\mathcal{B}' := \mathcal{C} \cup \{\vec{t}\}$ on a :
$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{t}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$
donc $\mathcal{B}'$ est libre et $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}$ et $\operatorname{card}\mathcal{B}' = 3$ u.q.
$A = \operatorname{Vect}\mathcal{A} = \operatorname{Vect}\mathcal{B}' \Rightarrow \boxed{\dim A = 3}$ (donc $A = \mathbb{R}^3$)

EXERCICE 3 :

(1) Par déf. de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \equiv A =$
$$\begin{array}{ccc} & & \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ \uparrow\ \ \ \ \ \ \uparrow\ \ \ \ \ \ \uparrow \\ u(e_1)\ u(e_2)\ u(e_3) \end{array}$$

(2) La solution longue serait d'écrire "en ligne" :
$u(x,y,z) = u(x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}) \underset{u\text{-lin.}}{=} xu(\vec{e_1}) + yu(\vec{e_2}) + zu(\vec{e_3})$
$= x(2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} - \vec{e_3}) + y(-\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + \vec{e_3}) + z(\vec{e_1} + \vec{e_3})$
$= (2x - y + z)\vec{e_1} + (3x - 2y)\vec{e_2} + (-x + y + z)\vec{e_3}$
$= (2x - y + z,\ 3x - 2y,\ -x + y + z) \equiv (a,b,c)$.
La solution courte serait d'utiliser (1) et travailler avec des matrices, dans la base $\mathcal{E}$:
$u(x,y,z) = (a,b,c) \iff A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff$
$\iff \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ 3x - 2y \\ -x + y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

(3) et (4)

on développe d'après la ligne 2 mais encore plus simple était de développer d'après la colonne 3

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 6 - 6 = 0$$
donc A n'est pas inversible. Or, A est la matrice dans $\mathcal{E}$ de l'endomorphisme u, ce qui veut dire que u n'est pas bijectif ce qui, pour les endomorphismes équivaut à ne pas être surjectif (et pas injectif) donc
$$\operatorname{Im} u \subsetneq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \underbrace{\dim \operatorname{Im} u}_{\operatorname{rang} u} \lneq 3 = \dim\mathbb{R}^3.$$

(5) $\operatorname{Ker} u \overset{\text{déf}}{=} \{\vec{X} \in \mathbb{R}^3 \mid u(\vec{X}) = \vec{0}\}$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Or cette équation matricielle équivaut au système d'équations (scalaires) :

$$(S)\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x - 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

... qu'on a déjà rencontré à l'EXERCICE 2 et qu'on a résolu avec le Pivot de Gauss en montrant qu'il équivaut à un système à 2 eq. et 3 inconnues : $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$

On prend alors $3-2=1$ inconnue(s) comme paramètre, par ex. $z=\lambda$, mais pas au hasard : on s'assure que le déterminant des coeffs des inconnues principales x et y est $\neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{(voir zone encadrée ds syst.)}$$

On a donc : $\begin{cases} 2x - y = -\lambda \\ y = -3\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -3\lambda \end{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}$

... et comme λ est $\forall$ ds $\mathbb{R}$ on peut oublier les signes "$-$" (moins). On trouve donc :

$$\operatorname{Ker} u = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 3\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \underset{\text{Obs}}{=} \operatorname{Vect}\{u(\vec{e}_1)\}$$

donc $\dim \operatorname{Ker} u = 1$ et une base de $\operatorname{Ker} u$ est $\{u(\vec{e}_1)\}$.

(6) Par le thm du rang :

$$\dim \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(vu comme dim. de départ pour } u)}}{\mathbb{R}^3} = \dim \operatorname{Ker} u + \underbrace{\dim \operatorname{Im} u}_{\equiv \operatorname{rang} u} \iff$$

$$\iff 3 = 1 + \operatorname{rang} u \iff \operatorname{rang} u = 2.$$

Obs : on aurait pu remarquer que, puisque $\operatorname{rang} u = \operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(S)$ (voir C.M.)

u : endomorphisme ; A : matrice de u ds n'importe quelle paire de bases (ici : $\mathcal{E},\mathcal{E}$) ; (S) : système attaché à l'eq. matricielle $A\vec{X} = \vec{0}$

et comme le rang de (S) était $= 2$ (car 2 eq. indépendantes sur 3 dans la forme réduite obtenue par Pivot de Gauss) on a : $\operatorname{rang} u = 2$.

(7) On sait (CM) que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\{u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3)\}$ mais de (6) : $\dim \operatorname{Im} u = 2$ donc il faut en sélectionner 2 vect. linéairement indépendants.

On voit que les coordonnées de $u(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles : $\frac{2}{-1} \neq \frac{3}{-2}$ donc $(u(\vec{e}_1); u(\vec{e}_2))$ est une base de $\operatorname{Im} u$

(8) NON. Car si on avait $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = \mathbb{R}^3$ on devrait avoir $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ or, par (5) et (7) : $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u \ni u(\vec{e}_1)$ donc $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u \supseteq \operatorname{Vect}\{u(\vec{e}_1)\} = \operatorname{Ker} u \underset{\neq}{\supseteq} \vec{0}$

Donc en vérité on a : $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{R}^3$. Donc non seulement que la somme n'est pas directe mais elle $\underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{R}^3$.