Examen d'Algèbre Linéaire

Durée : 1h30

Les documents, les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés

Le barème est donné à titre indicatif. Les questions signalées d'un astérisque sont hors barème

Les exercices sont indépendants. Toute réponse sans justification vaut zéro

Exercice 1 : (6 points)

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ sont orthogonaux.

2. Soit le point $A = A(1, 1, 1)$ dans l'espace et notons par $\mathcal{P}$ le plan dans l'espace dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et qui contient le point A.

2.a) Donner un système d'équations paramétriques du plan $\mathcal{P}$.

2.b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $3x - 2y + 26z = 27$.

3. On veut retrouver l'équation précédente par un autre argument.

3.a) Calculer (à l'aide de sa définition) le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, qu'on notera par $\overrightarrow{n}$.

3.b) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ et justifier (si nécessaire) qu'on retrouve ainsi le résultat obtenu à la question (2.b).

Exercice 2 : (4 points + 1,5 points bonus)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soit les vecteurs : $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{t} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Le système de vecteurs $\mathcal{A} = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}; \overrightarrow{t})$ est-il libre ? Justifiez.

2. Le système de vecteurs $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w})$ est-il une base de $\mathbb{R}^3$?

3. Le système de vecteurs $\mathcal{C} = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ est-il libre ?

4.* Notons par A, B et C les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés par les systèmes de vecteurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, et $\mathcal{C}$ respectivement. Quelles sont les dimensions des espaces A, B et C ? Justifiez.

Exercice 3 : (10 points + 2 points bonus)

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$ et soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire (endomorphisme) qui agit sur les éléments de $\mathcal{E}$ comme suit :

$$\begin{cases} u(\overrightarrow{e_1}) &= 2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} \\ u(\overrightarrow{e_2}) &= -\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} \\ u(\overrightarrow{e_3}) &= \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3} \end{cases}$$

1. Donner la matrice $A = M_{\mathcal{E}}(u)$ dans la de base canoniques $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Indiquer la façon dont u agit sur un triplet (x, y, z) quelconque de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, trouver l'expression de a, b et c en fonction de x, y, z tels que $u(x, y, z) = (a, b, c)$.

3. Calculer $\det A$, le déterminant de A, et en déduire (en justifiant !) que l'endomorphisme u n'est pas bijectif.

4. u est-elle surjective ? u est-elle injective ? le rang de A (donc celui de u) peut-il être égal à $3 = \dim \mathbb{R}^3$?

5. Trouver $\ker u$, le noyau de u, en donnant le(s) vecteur(s) d'une de ses bases. Quelle est sa dimension ?

6. En déduire le rang de u, autrement dit, trouver la dimension de $\operatorname{Im} u$ l'espace image de u.

7. Indiquer une base de l'espace image de u.

8.* L'espace $\mathbb{R}^3$ se décompose-t-il en somme directe $\mathbb{R}^3 = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$?