Université de Cergy-Pontoise - L1 Examen du 17 janvier 2018 - 1ère session

CORRIGÉ de l'Examen d'Algèbre Linéaire

Exercice 1 :

1. $A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A \times C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$,
$D \times E = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_3.$
2. $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2,$
Pour calculer $\det(D)$ le plus rapide est de développer le long de la 2éme ligne, car elle contient le plus de zéros : $\det(D) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.$
Alternativement, si C_1, C_2, C_3 sont les vecteurs-colonne de D, on peut appliquer la formule du produit mixte : $\det(D) = C_1 \cdot (C_2 \wedge C_3) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$
3. On sait déjà que A et$D$ sont inversibles (leur déterminants sont $\neq 0$).
Aussi, on sait qu'inverser une matrice inversible $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ revient à résoudre l'équation matricielle $MX = Y$, où $X, Y \in \mathbb{R}^n$, i.e. trouver M^{-1} t.q. $X = M^{-1}Y$.
Dans le cas $M = A$ on a $n = 2$ et l'équation $AX = Y$ équivaut au système d'équations scalaires (qu'on résolve par le pivot de Gauss) :
$$\left\{ \begin{array}{rl} 3x_1 + 4x_2 & = y_1 \\ x_1 + 2x_2 & = y_2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrl} 3x_1 & + \quad 4x_2 & = y_1 \\ & + \quad (2 - \frac{4}{3})x_2 & = -\frac{1}{3}y_1 + y_2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x_1 & = y_1 - 2y_2 \\ x_2 & = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2 \end{array} \right.$$
Ce dernier système équivaut à $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ donc à $X = A^{-1}Y$.
Alternativement, on aurait pu utiliser la formule (déconseillée) d'inversion avec la comatrice, et obtenir :
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$
Pour inverser D on peut procéder pareillement, mais ce ne sera pas nécessaire, car, à la question 1 on a vu que $D \times E = \mathbb{I}_3$, donc $D^{-1} = E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :

1. $(x, y) \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x - 2y & = -1 \\ 2x + y & = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x - 2y & = -1 \\ 5y & = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array} \right.$
Donc $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{P\}$ avec $P = P(1, 1)$.
2. Si $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ sont des vecteurs normaux à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ respectivement, on a : $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ $\Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$. Des équations cartésiennes des deux droites on déduit qu'on peut prendre $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$ d'où $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$.
3. Comme $x_A - 2y_A = 3 - 2 \cdot 2 = -1$, les coordonnées du point A satisfont l'équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$. Donc $A \in \mathcal{D}_1$.
Fait général : si $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$ et $M \in \mathcal{D}_{\substack{1\\2}}$, le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}_{\substack{2\\1}}$ est le point P d'intersection des deux droites.
Or, on a vu que $A \in \mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$ donc le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}_2$ est $P = P(1, 1)$.

La distance entre A et $\mathcal{D}_2$ est donc : $d(A,\ \mathcal{D}_2) = \|\vec{AP}\| = \sqrt{(1-3)^2+(1-2)^2} = \sqrt{5}$.
Alternativement, si on n'avait pas tenu compte du contexte particulièrement simple du problème, on aurait pu aussi utiliser la formule générale $d(A,\ \mathcal{D}_2) = \dfrac{|2x_A+y_A-3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{|2\cdot 3+2-3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Exercice 3 :

1. $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix} 3\\ -1\\ 2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} 3 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\\ 2\\ 7\end{pmatrix}$.

2. On veut montrer que $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{t} = \vec{0}_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0_{\mathbb{R}}$. L'identité de gauche équivaut à :
$$\begin{cases} -\alpha+2\beta+5\gamma &= 0\\ 3\alpha\ +\beta &= 0\\ 2\alpha \qquad +2\gamma &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+2\beta+5\gamma &= 0\\ \quad +7\beta\ +15\gamma &= 0\\ \qquad \beta\ +3\gamma &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+2\beta+5\gamma &= 0\\ \quad +7\beta\ +15\gamma &= 0\\ \qquad +(3-\frac{15}{7})\gamma &= 0\end{cases}.$$
Or $3-\frac{15}{7}\neq 0$ donc il s'agit d'un système homogène échelonné dont l'unique solution est celle triviale : $\alpha=\beta=\gamma=0_{\mathbb{R}}$. Les vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{v}$ sont donc linéairement indépendants.

   Alternativement, puisqu'il s'agit du cas particulier de 3 vecteurs dans un e.v. de dimension 3, on peut aussi utiliser le critère de non annulation du déterminant.
   On pourra par exemple se montrer plus astucieux en utilisant la question 1 :
$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{t}) = \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{t}) = \vec{t}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v}) = (-4)\times 0+2\times 5+7\times 2 = 24\neq 0$$
   ... ou calculer tout bêtement le déterminant en le développant le long d'une ligne/colonne :
$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{t}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} = 10+14 = 24\neq 0.$$

Exercice 4 :

1. Rappelons que si X, T sont des vecteurs-colonne écrits dans une même base de $\mathbb{R}^3$ (qu'on pourra prendre comme base base "canonique" de cet espace) et A est le matrice de f dans cette même base, alors : $AX = T \Longleftrightarrow f(x,y,z) = (t_1,t_2,t_3)$. Si A est la matrice donnée, on en déduit donc :
$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z) = (x+2y+z,\ -2x-4y-2z,\ x+2y+z)$$

2. D'après la question précédente et la définition du noyau de f (par pivot de Gauss) :
$$(x,y,z)\in\ker f \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z &= 0\\ -2x-4y-2z &= 0\\ x+2y+z &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z &= 0\\ 0 &= 0\\ 0 &= 0\end{cases} \Leftrightarrow x+2y+z=0.$$
   Le sous-espace ker$f$ est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On voit l'équation de ce plan comme un système à une équation et à 3 inconnues. On choisit (par exemple) x comme inconnue principale et y et z on les voit comme des paramètres. On pourrait même les re-noter par λ et μ. Ainsi,
$$(x,y,z)\in\ker f \Leftrightarrow \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda-\mu\\ \lambda\\ \mu\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \lambda u+\mu v$$
   On trouve ainsi que $\ker f = \mathrm{Vect}\{u,v\}$ où u, v sont les vecteurs de la combinaison linéaire ci-dessus.

Commentaire : cette méthode (basée sur le pivot de Gauss dans la première chaîne des équivalences) assure automatiquement l'indépendance linéaire des vecteurs u, v (c'est un fait général, à condition que dans le système échelonné l'on choisisse correctement les variables dites principales et celles qui jouent rôle de paramètres) ! ! Pour notre cas il est aisé de vérifier que u et v forment un système libre, car $\lambda u + \mu v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow -2\lambda - \mu = \lambda = \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$.

Ainsi, une base de $\ker f$ est par exemple $\mathcal{K} = [u,\ v]$ avec u, v définis ci-dessus. Donc $\dim \ker f = 2$.

3. Pour pouvoir parler de la somme d'espaces vectoriels $\ker f + \operatorname{Im} f$ il nous faut connaître une base de $\operatorname{Im} f$. Le théorème du rang nous dit quelle est sa dimension :

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1.$$

On a donc besoin de juste un vecteur non nul de l'image de f pour en donner une base de celle-ci. Par exemple, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a pour image par f le vecteur $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc une base de $\operatorname{Im} f$ est $\mathcal{I} = [w]$.
Enfin, en $\mathbb{R}^3$, le système de vecteurs $\mathcal{S} = \mathcal{K} \cup \mathcal{I} = [u, v, w]$ est libre (car $\det(u, v, w) = -2 \neq 0$) donc $\mathcal{S}$ est à la fois une base de $\mathbb{R}^3$ et de son sous-espace (somme) $\ker f + \operatorname{Im} f$. Par conséquent cette somme est directe et vaut $\mathbb{R}^3$ lui-même.

Commentaire : cet argument fait appel directement à la *définition* de la qualité d'une somme de s.e.v. d'être directe : la décomposition *unique* de tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ en combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{S} = \mathcal{K} \cup \mathcal{I}$ assure sa décomposition *unique* en somme entre un vecteur de $\ker f$ et un vecteur de $\operatorname{Im} f$ ce qui entraîne à la fois l'inclusion $\mathbb{R}^3 \subseteq \ker f + \operatorname{Im} f$ et le fait que la somme est directe.
Cette preuve a donc l'avantage qu'elle ne fait pas appel à des critères équivalents pour qu'une somme soit directe, critères qui ne sont valables que s'il s'agit d'additionner seulement 2 sous-espaces vectoriels.
Cependant, rien n'empêche, dans notre cas particulier, de s'employer à montrer que la somme $\ker f + \operatorname{Im} f \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, sachant que la condition d'égalité $\mathbb{R}^3 = \ker f + \operatorname{Im} f$ peut être remplacée par le "bilan de dimension" $3 = 2 + 1$ fourni par le théorème du rang.

Exercice 5 :

1. On a : $(x, y, z) \in \ker u \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2x - y + z & = 0 \\ 3x + 2y - 3z & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2x - y + z & = 0 \\ 7y - 9z & = 0 \end{array} \right.$. Le système ayant été apporté sous forme échelonnée par pivot de Gauss, il a (toujours) 3 inconnues et 2 équations. Il faudra choisir donc 2 inconnues principales et une inconnue jouant rôle de paramètre, qu'on fera passer dans le membre de droite du système. Le choix des inconnues principales se fait de sorte que le système ainsi résultant soit un système de Cramer, i.e. le déterminant des coefficients des inconnues principales soit non nul. Par exemple, on peut choisir x, y inconnues principales puisque $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$. En re-notant z par λ le système devient $\left\{ \begin{array}{ll} 2x - y & = -\lambda \\ 7y & = 9\lambda \end{array} \right.$ d'où on tire $y = \frac{9}{7}\lambda$ et $x = \frac{9}{7}\lambda$. Donc $\ker u = \operatorname{Vect}\{X\}$ où $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$. Donc $\dim \ker u = 1$ et $\ker u \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ i.e. u n'est pas injective.
2. D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} u = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker u = 3 - 1 = 2$. Or, $\operatorname{Im} u$ est sous-espace de l'espace d'arrivée de u, qui est $\mathbb{R}^2$ (donc de dimension 2 aussi). Ceci prouve que $\operatorname{Im} u$ n'est autre que $\mathbb{R}^2$ lui-même, donc que u est surjective.
3. Si $\mathcal{E} = [e_1, e_2, e_3]$ est base canonique de $\mathbb{R}^3$ (espace de départ pour u) et $\mathcal{F} = [f_1, f_2]$ est base canonique de $\mathbb{R}^2$ (espace d'arrivée pour u), l'action de u sur les éléments de $\mathcal{E}$ est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(e_1) = & 2f_1 + 3f_2 \\ u(e_2) = & -f_1 + 2f_2 \\ u(e_3) = & f_1 - 3f_2 \end{array} \right. \text{ qui fournit } M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \overset{not.}{=} A.$$

4. (a) En calculant $\det(e'_1, e'_2, e'_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ on déduit que la famille $\mathcal{E}'$ de $\mathbb{R}^3$ est libre, et comme $\operatorname{card} \mathcal{E}' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on conclut que $\mathcal{E}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) La matrice de passage d'une base "ancienne" (ici : la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$) vers une base "nouvelle" (ici : la base $\mathcal{E}'$ de $\mathbb{R}^3$) est fournie par le système issu des définitions des vecteurs de $\mathcal{E}'$ (voir énoncé) :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{Id}(e'_1) = e'_1 = & & e_2 + e_3 \\ \mathrm{Id}(e'_2) = e'_2 = & e_1 & + e_3 \\ \mathrm{Id}(e'_3) = e'_3 = & e_1 + e_2 & \end{array} \right. \quad \text{qui fournit } M_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) =: P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{not.}{=} P.$$

   (c) Nous nous trouvons dans une situation très simple : $\mathbb{R}^3$, l'espace de départ pour u, est muni de deux bases ("l'ancienne" $\mathcal{E}$ et la "nouvelle" $\mathcal{E}'$) mais dans l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^2$ on ne considère qu'une seule base, à savoir sa base canonique $\mathcal{F}$. Ainsi, on a les diagrammes commutatifs pour les applications, respectivement pour leur matrices dans ces bases, suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "u"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{F}) \\ \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\mathrm{Id}"] \arrow[ur, "u \circ \mathrm{Id}"] & \end{tikzcd} \qquad \qquad \begin{tikzcd} (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}) \arrow[r, "A"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{F}) \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}') \arrow[u, "P = M_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{Id})"] \arrow[ur, "B"] & \end{tikzcd}$$

$$u \circ \mathrm{Id} = u \qquad \Longleftrightarrow \qquad AP = B$$

   Alternativement, soit $x \in \mathbb{R}^3$ et $y \in \mathbb{R}^2$ tel que $u(x) = y$. Soit X la matrice-colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}$ et X' la matrice-colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}'$. Alors $X = PX'$. Soit Y la matrice-colonne des coordonnées de y dans la base $\mathcal{F}$. D'après $u(x) = y$, $Y = AX$ et $Y = BX'$. Donc, pour tout X', $APX' = BX'$. Donc $AP = B$.

Exercice 6 :

1. Réponse : OUI, tout espace vectoriel E vérifiant $9 \leq \dim E \leq 10$ convient.
   En effet, si l'espace vectoriel E contient un système de générateurs $\mathcal{G}$ de cardinal 10, alors par la définition de la dimension finie, $\dim E \leq 10$.
   Si $\dim E$ était strictement inférieure à 9, toute base de E aurait 8 éléments ou moins. Or dans un e.v. une base est le système de vecteurs ayant le plus de vecteurs linéairement indépendants. Donc ceci contredirait l'hypothèse selon laquelle il existe dans E un système libre $\mathcal{L}$ ayant 9 vecteurs. Il s'en suit que $\dim E \geq 9$. Donc l'hypothèse implique $9 \leq \dim E \leq 10$.
   Réciproquement, si $\dim E = 9$ alors $\mathcal{L}$ est automatiquement base de E (ce qui ne contredit pas $E = \operatorname{Vect} \mathcal{G}$) et si $\dim E = 10$ alors $\mathcal{G}$ est automatiquement base de E (ce qui ne contredit pas que $\mathcal{L}$ est libre dans E).
2. Réponse : NON.
   En effet, avec les notations de la question précédente, si le cardinal de $\mathcal{G}$ est inférieur à 8, on a $\dim E \leq 8$. Aussi, si le cardinal de $\mathcal{L}$ est supérieur ou égal à 9 alors toute base de E aura un cardinal au moins égal à 9 donc $\dim E \geq 9$. En conclusion, l'hypothèse implique $9 \leq \dim E \leq 8$ ce qui est faux.