# Examen d'Algèbre Linéaire

**Durée : 3h** *Les documents, les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés*
*Le barème est donné à titre indicatif et les exercices sont indépendants*

**Exercice 1 :** (5 points) Soient $A$, $B$, $C$, $D$ les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

**1.** Calculer les produits $A \times B$, $A \times C$ et $D \times E$.

**2.** Calculer $\det(A)$ et $\det(D)$.

**3.** Calculer $A^{-1}$ et $D^{-1}$.

**Exercice 2 :** (3,5 points) Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites d'équations $x - 2y = -1$ et $2x + y = 3$ respectivement.

**1.** Montrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont un seul point d'intersection, $P$, dont on précisera les coordonnées.

**2.** Montrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonales ($=$ perpendiculaires).

**3.** Soit $A = (3, 2)$ un point du plan. Montrer que $A \in \mathcal{D}_1$. Déterminer le projeté orthogonal de $A$ sur $\mathcal{D}_2$. Calculer $d(A, \mathcal{D}_2)$.

**Exercice 3 :** (2 points) Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**1.** Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

**2.** Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{t}$ sont-ils linéairement indépendants (c'est-à-dire forment-ils une famille libre) ?

**Exercice 4 :** (3 points) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**1.** Déterminer l'image du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par $f$.

**2.** Déterminer une base de $\ker f$.

**3.** Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.

**Tournez la page s.v.p.** $\hookrightarrow$

**Exercice 5 :** (4,5 points)
Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ 3x + 2y - 3z \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base et la dimension de $\ker u$. $u$ est-elle injective ?
2. En déduire la dimension de $\operatorname{im} u$. L'application $u$ est-elle surjective ?
3. Donner la matrice $A$ de l'application $u$ dans les bases canoniques.
4. On définit la famille de vecteurs $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   **a)** Montrer que $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   **b)** Trouver la matrice de passage, $P$, de la base $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$, où $\mathcal{E}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   **c)** Soit $\mathcal{F}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $B$ la matrice de $u$ relative aux bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}$. En utilisant la formule de changement de bases, déterminer la relation entre les matrices $A$, $B$ et $P$ ?

**Exercice 6 :** (2 points)

1. Existe-t-il un espace vectoriel $E$ admettant une famille libre ayant 9 éléments et une famille génératrice ayant 10 éléments ? Si oui, que peut-on dire de la dimension de $E$ ?
2. Existe-t-il un espace vectoriel $F$ admettant une famille libre ayant 9 éléments et une famille génératrice ayant 8 éléments ? Si oui, que peut-on dire de la dimension de $F$ ?