Université de Cergy-Pontoise 2016/2017
L1 - MIPI

Examen d'Algèbre Linéaire
(Mercredi 11 janvier 2017 – durée 3 heures)
– Les documents, calculatrices, téléphones mobiles et objets connectés sont strictement interdits –

Questions de Cours.

1. Effectuer les opérations suivantes lorsque c'est possible. Lorsque c'est impossible, dire pourquoi.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^2, \qquad {}^t\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$. Trouver x et y pour que $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$.

Exercice 1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points

$$A(1;2;7), \quad B(2;0;2), \quad C(3;1;3).$$

1. Montrer que les points $A,\ B$ et C ne sont pas alignés.
2. Soit $\overrightarrow{u} = (1; b; c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres reels.
   a) Déterminer les valeurs de b et c telles que $\overrightarrow{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).
   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - 2y + z - 4 = 0$.

Exercice 2. Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x - 2y + z = 0\}, \qquad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x - y + 2z = 0\}.$$

1. Donner une base de F, une base de G, en déduire leurs dimensions respectives.
2. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. a) Calculer le déterminant de A.
   b) La matrice A est-elle inversible ? (on ne demande pas ici de calculer l'inverse)
2. Pour $a,\ b,\ c$ des nombres réels quelconques fixés, résoudre le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
3. En déduire la matrice inverse de A.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire definie par

$$f(x, y) = (-x + 3y, y).$$

1. Déterminer A, la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $Ker(f)$. A t-on f injective ? surjective ?
3. On considère la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ où $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que $\mathcal{B}'$est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.
5. Calculer A' la matrice de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Calculer A'^2, A'^n et A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on distinguera les deux cas : n pair et n impair).

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorphisme **non nul** tel que $f \circ f = \mathbf{0}$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$
2. Montrer qu'on a :
   — soit $\dim \operatorname{Im} f = 1$ et $\dim \ker f = 3$
   — soit $\dim \operatorname{Im} f = 2$ et $\dim \ker f = 2$