Université de Cergy-Pontoise 2015/2016
L1 - MIPI

Examen Session 2 d'Algèbre Linéaire

(Lundi 13 Juin 2016 – durée 1h30)

– Les documents, calculatrices, téléphones mobiles sont strictement interdits –

Exercice 1. Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ 2x-y-z &= 2 \\ x+3y &= 3 \end{cases}$$

Exercice 2. 1) On considère l'ensemble

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+y=0 \text{ et } z=t=0\}.$$

Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une base et la dimension.
2) On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(a, a+b, -a+c, c) | (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Donner une base et la dimension de F .
3) Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application definie par

$$f(x,y,z) = (x-y+z, -x+y+z, 2z).$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire et déterminer sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer $Ker(f)$ et en donner une base. On notera u_1 le vecteur de cette base.

(c) L'application f est-elle injective ? Surjective ?

2. (a) Déterminer la dimension de $Im(f)$ et montrer que les vecteurs $u_2 = f(e_2) = (-1,1,0)$ et $u_3 = f(e_3) = (1,1,2)$ en forment une base.

(b) Démontrer que $\mathcal{E}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre et en déduire que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Calculer les images par f de u_1, u_2, u_3 et écrire la matrice D de f dans la nouvelle base $\mathcal{E}'$.

(d) Donner une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$.