Université de Cergy-Pontoise — 2015/2016

L1 - MIPI

Examen d'Algèbre Linéaire

(Lundi 11 janvier 2016 – durée 3 heures)

– Les documents, calculatrices, téléphones mobiles sont strictement interdits –

Questions de Cours. Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ une famille de vecteurs de E.

(a) Rappeler la définition de " $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E".

(b) Si possible, donner une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ comprenant quatre vecteurs.

2. Soit F un (autre) espace vectoriel réel et $f : E \to F$ une application linéaire.

(a) Compléter : f injective $\Leftrightarrow ker(f) = ...$

(b) Définir le rang de f. Quel lien y a-t-il entre le rang de f et la dimension de $Ker f$?

3. On donne trois matrices réelles :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, $A \times B$, $\det A$ et $\det C$

Exercice 1. On note $(\mathcal{D})$ la droite de l'espace passant par les points A et B de coordonnées respectives $(2, 5, -3)$ et $(3, 4, -2)$.

(a) Donner les équations paramétriques de la droite $(\mathcal{D})$.

(b) En déduire les équations cartésiennes de la droite $(\mathcal{D})$.

(c) Trouver une équation cartésienne d'un plan $(\mathcal{P})$ passant par l'origine et contenant $(\mathcal{D})$.

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ considérons les trois vecteurs :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

La famille $\{V_1, V_2, V_3\}$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Justifiez votre réponse.

Exercice 3. Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } 2x - y + 2z = 0\}.$$

1. Montrer que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de P en justifiant qu'il s'agit bien d'une base.

Exercice 4. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (2x + z, z - y, 2x + y).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $ker(f)$.
4. L'application f est-elle bijective ?
5. Appliquer le théorème de rang pour trouver la dimension de $Im(f)$.
6. Trouvez une base de $Im(f)$ en justifiant votre méthode.

Exercice 5. On munit $\mathbb{R}^2$ de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ admettant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer $f(u)$.
2. On change la base $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}' = \{v, w\}$ où $v = -3e_1 + 4e_2$ et $w = e_1 + e_2$.
Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ de f relativement à la base $\mathcal{B}'$ et vérifier que A' est une matrice diagonale.
4. (a) Calculer $(A')^n$ en fonction de n.

   (b) Exprimer A en fonction de A' et de P.

   (c) En déduire A^n en fonction de n.
5. On considère la matrice

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le résultat de (c) de la question précédente, calculer G^n en fonction de n.