Examen d'algèbre linéaire 1 – corrigé

1^re^ session

13 janvier 2025

Exercice 1.

1.

$$w^2 = (1-\mathrm{i}\sqrt{3})^2 = 1^2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i} + (\mathrm{i}\sqrt{3})^2 = 1 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 3 = -2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}.$$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})(1+\mathrm{i}\sqrt{3})} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

2. Le module de w est $|w| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$. De plus :

$$\frac{w}{|w|} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\Big(-\frac{\pi}{3}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(-\frac{\pi}{3}\Big) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}},$$

donc l'argument de w appartenant à $]-\pi,\pi]$ est $-\frac{\pi}{3}$.

3. Calculons le discriminant du polynôme $P(Z) = Z^2 - 2Z + 4$:

$$\Delta = 4 - 4\times 4 = -12.$$

Une racine carrée de Δ est $\delta = \mathrm{i}\sqrt{12} = 2\mathrm{i}\sqrt{3}$, donc les racines de P sont :

$$z_1 = \frac{-(-2)+\delta}{2} = \frac{2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = \overline{w},$$

$$z_2 = \frac{-(-2)-\delta}{2} = \frac{2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = w.$$

Ainsi, les solutions de $P(Z) = 0$ sont w et $\overline{w}$.

4. On a :

$$z^{2n} - 2z^n + 2 = 0 \iff P(z^n) = 0 \iff z^n = w \text{ ou } z^n = \overline{w}.$$

Les solutions sont donc les racines n-ièmes de w et de $\overline{w}$. Il suffit de calculer les racines n-ièmes de w, celles de $\overline{w}$ s'en déduisent par conjugaison. On cherche $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z^n = w$:

$$\begin{aligned} z^n = w &\iff r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \\ &\iff \begin{cases} r^n = 2 \\ n\theta \equiv -\dfrac{\pi}{3} \mod 2\pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{n}} \\ \theta \equiv -\dfrac{\pi}{3n} \mod \dfrac{2\pi}{n} \end{cases} \end{aligned}$$

Les racines n-ièmes de w sont $z_k = 2^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de $z^{2n} - 2z^n + 4 = 0$ est :

$$\big\{z_k : k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\big\} \cup \big\{\overline{z}_k : k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\big\}.$$

Exercice 2.

1.

$$\begin{cases} x+2y+\ \ 3z=0 \\ 2x-\ \ y+\ \ \ z=0 \\ 5x+3y+mz=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+\qquad\quad 3z=0 \\ \ -5y-\qquad\quad 5z=0 & L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ \ -7y+(m-15)z=0 & L_3\leftarrow L_3-5L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y+\qquad\quad 3z=0 \\ \qquad y+\qquad\qquad z=0 & L_2\leftarrow -\frac{1}{5}L_2 \\ \ -7y+(m-15)z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y+\qquad 3z=0 \\ \qquad y+\qquad\quad z=0 \\ \qquad\qquad (m-8)z=0 & L_3\leftarrow L_3+7L_2 \end{cases}$$

2. Si $m\neq 8$, le système est de rang 3. Si $m=8$, il est de rang 2.

3. Pour $m\neq 8$, le système est de rang 3 donc il admet une unique solution : la solution nulle. Donc $F_m=\{(0,0,0)\}$.

4. Si $m=8$:

$$(\mathscr{S}_8) \iff \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ \qquad y+\ \ z=0 \\ \qquad\quad 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases} \iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x=-\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda. \end{cases}$$

Ainsi, $F_8=\{(-\lambda,-\lambda,\lambda):\lambda\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(u)$ avec $u=(-1,-1,1)$. Le vecteur u est non nul, donc c'est une base de F_8 et $\dim(F_8)=1$. Ainsi, F_8 est la droite vectorielle dirigée par u.

Exercice 3.

1. f est linéaire si :
- $\forall x,y\in E$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$;
- $\forall x\in E$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $f(\lambda x)=\lambda f(x)$.

2. Par linéarité, $f(0_E)=f(0\cdot 0_E)=0\cdot f(0_E)=0_F$.

3. Le noyau de f est l'ensemble $\mathrm{Ker}(f)=\{x\in E\,|\,f(x)=0_F\}$.

4. Premièrement, $0_E\in\mathrm{Ker}(f)$ d'après la question 2. Deuxièmement, montrons que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par combinaisons linéaires. Soient $x,y\in\mathrm{Ker}(f)$ et soit $\lambda\in\mathbb{K}$, montrons que $x+\lambda y\in\mathrm{Ker}(f)$. Par linéarité de f, on a :

$$f(x+\lambda y)=\underbrace{f(x)}_{\substack{=0_F \\ \text{car } x\in\mathrm{Ker}(f)}}+\lambda\underbrace{f(y)}_{\substack{=0_F \\ \text{car } y\in\mathrm{Ker}(f)}}=0_F,$$

donc $x+\lambda y\in\mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, on a montré que $\mathrm{Ker}(f)$ est un s.e.v. de E.

Exercice 4.

1. Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{K}$ tels que $\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0_E$. On a :

$$\begin{aligned}\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0_E &\iff \alpha(e_1+2e_2+2e_4)+\beta(e_1+e_2+2e_4)+\gamma(2e_1-e_2+e_4)=0_E \\ &\iff (\alpha+\beta+2\gamma)e_1+(2\alpha+\beta-\gamma)e_2+(2\alpha+2\beta+\gamma)e_4=0_E.\end{aligned}$$

Or la famille (e_1,e_2,e_4) est libre, donc une combinaison linéaire de (e_1,e_2,e_4) est nulle si seulement si ses coefficients sont nuls. Ainsi :

$$\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0_E \iff \begin{cases} \alpha+\ \ \beta+2\gamma=0 \\ 2\alpha+\ \ \beta-\ \ \gamma=0 \\ 2\alpha+2\beta+\ \ \gamma=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma=0 \\ \ -\beta-5\gamma=0 & L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ \qquad -3\gamma=0 & L_3\leftarrow L_3-2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \alpha=\beta=\gamma=0.$$

Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. En revanche, elle n'est pas génératrice de E car $\dim(E) = 4$ et $\mathscr{C}$ ne contient que 3 vecteurs.

2. Commençons par remarquer que u_1, u_2, u_3 sont bien des vecteurs de F. Or, $\dim(F) = 3$ car (e_1, e_2, e_4) est libre et génératrice de F, donc c'est une base de F. Puisque $\mathscr{C}$ est une famille libre de 3 vecteurs appartenant à F, c'est une base de F.

3. D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f).$$

Si f était surjective, on aurait $\operatorname{Im} f = E$, donc $\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(E) = -1$; absurde. Donc f n'est pas surjective.

4. Calculons le noyau de f. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f \iff f(x, y, z) = 0_E \iff (x + y + z)u_1 + (y + z)u_2 + zu_3 = 0_E.$$

Puisque (u_1, u_2, u_3) est libre, on a :

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad\;\; y + z = 0 \\ \qquad\quad z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (0, 0, 0).$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc f est injective.

5. Par définition de f, on a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3) = F$ (question 2). Or, $F = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_4)$, donc $e_3 \notin F$ car la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre. Par conséquent, $e_3 \notin \operatorname{Im} f$.