Examen d'algèbre linéaire 1

1re session

13 janvier 2026

Durée : 2 heures (tiers temps : 2 heures 40 minutes).

Barème : 24 points (répartition indicative).

Nombre de pages : 1.

Consignes :

- Documents, calculatrices, tablettes, smartphones et smartwatchs interdites.
- Les réponses doivent être rédigées soigneusement et les calculs suffisamment détaillés.
- Les réponses non justifiées ne sont pas prises en compte et ne rapportent pas de points.
- Le sujet comporte 4 exercices indépendants qui peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 (6 pts)**.** Soit $w = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Calculer w^2 et w^{-1} sous forme algébrique.
2. Calculer le module et un argument de w appartenant à $]-\pi, \pi]$.
3. Résoudre l'équation $Z^2 - 2Z + 4 = 0$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les solutions de $z^{2n} - 2z^n + 4 = 0$ sous forme exponentielle.

Exercice 2 (7 pts)**.** Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère le système linéaire d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 5x + 3y + mz = 0. \end{cases} \qquad (\mathscr{S}_m)$$

On note F_m l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S}_m)$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour échelonner $(\mathscr{S}_m)$, en précisant les opérations élémentaires effectuées à chaque étape.
2. Discuter le rang du système selon la valeur de m.
3. Déterminer F_m pour $m \neq 8$.
4. Pour $m = 8$, déterminer une base et la dimension de F_m.

Exercice 3 (4 pts)**.** Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Donner la définition de « f est une application linéaire ».
2. Montrer que $f(0_E) = 0_F$.
3. Donner la définition de $\mathrm{Ker}(f)$ (le noyau de f).
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4 (7 pts)**.** Soit E un espace vectoriel admettant pour base la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère les vecteurs :

$$u_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_4, \qquad u_2 = e_1 + e_2 + 2e_4, \qquad u_3 = 2e_1 - e_2 + e_4.$$

1. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est libre. Est-elle génératrice de E ?
2. Justifier que $\mathscr{C}$ est une base de $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_4)$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to E$ une application linéaire. Montrer à l'aide du théorème du rang que f n'est pas surjective.
4. On suppose que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y + z)u_1 + (y + z)u_2 + zu_3$. L'application f est-elle injective ?
5. Donner, en justifiant, un exemple de vecteur de E n'appartenant pas à $\mathrm{Im}(f)$.