

Examen d'algèbre linéaire 1 – corrigé

1^{re} session

16 janvier 2024

Exercice 1 (4 pts).

- La dimension de E est le nombre de vecteurs d'une base de E , avec la convention $\dim(E) = 0$ si $E = \{0_E\}$.
- $\ker f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
 - $\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$
 - Si E est de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(\ker f) + \operatorname{rg}(f)$.
- Premièrement, $F \cap G$ est non vide car F et G contiennent le vecteur nul. Deuxièmement, montrons que $F \cap G$ est stable par combinaisons linéaires. Soient $u, v \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on a :
 - $u + \lambda v \in F$ car u et v sont dans F et F est stable par combinaisons linéaires ;
 - $u + \lambda v \in G$ car u et v sont dans G et G est stable par combinaisons linéaires ;
 donc $u + \lambda v \in F \cap G$. Ainsi, $F \cap G$ est stable par combinaisons linéaires. Par conséquent, $F \cap G$ est un s.e.v. de E .

Exercice 2 (6 pts).

1.

$$a = (3 + 4i)^2 = 9 + 24i - 16 = -7 + 24i.$$

$$b = \frac{4 - i}{2 - 3i} = \frac{(4 - i)(2 + 3i)}{2^2 + 3^2} = \frac{8 + 12i - 2i + 3}{13} = \frac{11}{13} + \frac{10}{13}i.$$

2. a. Soit $z := x + iy \in \mathbb{C}$, on a :

$$z^2 = 1 + i \iff (x + iy)^2 = 1 + i \iff x^2 + 2ixy - y^2 = 1 + i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

On ajoute l'équation $|z|^2 = |1 + i|$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = \sqrt{2} + 1 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2y^2 = \sqrt{2} - 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

Puisque $xy > 0$, les nombres x et y sont de même signe, donc les solutions du système sont :

$$(x, y) = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \right) \quad \text{et} \quad (x, y) = \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \right).$$

Les racines carrées de $1 + i$ sont donc :

$$z_1 := \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 := -z_1.$$

b. $1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$

- c. Sous forme exponentielle, les racines carrées de $\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ sont $2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{9\pi}{8}}$, et sous forme algébrique, les racines carrées sont z_1 et z_2 de la question 2a. Puisque $\Re(z_1)$ et $\Im(z_1)$ sont positifs, l'argument principal de z_1 appartient à $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc $z_1 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}}$. Par conséquent :

$$e^{i\frac{\pi}{8}} = 2^{-\frac{1}{4}} z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Par définition de l'exponentielle imaginaire, on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

3. a. *Solution 1.* On écrit -8 sous forme exponentielle : $-8 = 8e^{i\pi}$. Cherchons les racines cubiques sous forme exponentielles. Soit $w = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, on a :

$$\begin{aligned} w^3 = -8 &\iff r^3 = 8 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, 3\theta = \pi + 2k\pi \\ &\iff r = 2 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{3} \\ &\iff r = 2 \quad \text{et} \quad \exists k \in \{0, 1, 2\}, \theta = \frac{(2k+1)\pi}{3}. \quad (\text{car } \theta \in [0, 2\pi[) \end{aligned}$$

Ainsi, les racines cubiques de -8 sont :

$$w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}, \quad w_1 = 2e^{i\pi} = -2, \quad w_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}.$$

Solution 2. Une racine cubique évidente de -8 est -2 . On rappelle que les racines cubiques de l'unité sont $1, j$ et j^2 avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc les racines cubiques de -8 sont :

$$w'_0 = -2, \quad w'_1 = w'_0 \times j = 1 - i\sqrt{3}, \quad w'_2 = w'_0 \times j^2 = 1 + i\sqrt{3}.$$

- b. On a $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = -8$ si et seulement si $\frac{z-1}{z+1}$ est une racine cubique de -8 . Soit w une racine cubique de -8 , on a :

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+1} = w &\iff z-1 = w(z+1) \\ &\iff z(1-w) = 1+iw \\ &\iff z = \frac{1+iw}{1-w}. \quad (w \neq 1 \text{ d'après 3a}) \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = -8$ sont :

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1+iw_0}{1-w_0} & z_1 &= \frac{1+iw_1}{1-w_1} & z_2 &= \frac{1+iw_2}{1-w_2} \\ &= \frac{1-\sqrt{3}+i}{-i\sqrt{3}} & &= \frac{1-2i}{3} & &= \frac{1+\sqrt{3}+i}{i\sqrt{3}} \\ &= \frac{i\sqrt{3}-3i-\sqrt{3}}{3} & &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i & &= \frac{-i\sqrt{3}-3i+\sqrt{3}}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right) & & & &= \frac{\sqrt{3}}{3} - i\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right). \end{aligned}$$

Exercice 3 (7 pts).

1.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x-2y-5z-3t=0 \\ -2x+5y+13z+6t=0 \\ -x+y+3z+2t=0 \\ 3x-4y-9z-9t=0. \end{cases} &\iff \begin{cases} x-2y-5z-3t=0 \\ y+3z=0 & L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ -y-2z-t=0 & L_3 \leftarrow L_3+L_1 \\ 2y+6z=0 & L_4 \leftarrow L_4-3L_1. \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x-2y-5z-3t=0 \\ y+3z=0 \\ z-t=0 & L_3 \leftarrow L_3+L_2 \\ 0=0 & L_4 \leftarrow L_4-2L_2. \end{cases} \end{aligned}$$

2.

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x-2y-5z-3t=0 \\ y+3z=0 \\ z-t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2t \\ y=-3t \\ z=t \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$ une variable libre. Par conséquent, $F = \{(2t, -3t, t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(v_0)$ où $v_0 = (2, -3, 1, 1)$.
Le vecteur v_0 forme une base de F .

3. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^4} &\iff \begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - 2\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -8\alpha - 9\beta + 5\gamma = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 & L_1 \leftarrow L_3 \\ -\alpha - 2\beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_1 \\ -8\alpha - 9\beta + 5\gamma = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -\beta + 3\gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ -\beta - 3\gamma = 0 & L_4 \leftarrow L_4 + 8L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \\ 2\gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ -4\gamma = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

4. D'après la question précédente, (v_1, v_2, v_3) est une famille libre, donc c'est une base de $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. Par conséquent, $\dim(\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)) = 3$, c'est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.
5. Il suffit de montrer que le vecteur directeur de F n'appartient pas à $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. Cherchons si v_0 peut s'écrire comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3 :

$$\begin{aligned}
\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = v_0 &\iff \begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 2 \\ -\alpha - 2\beta + 2\gamma = -3 \\ \alpha + \beta - \gamma = 1 \\ -8\alpha - 9\beta + 5\gamma = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 1 & L_1 \leftarrow L_3 \\ -\alpha - 2\beta + 2\gamma = -3 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 2 & L_3 \leftarrow L_1 \\ -8\alpha - 9\beta + 5\gamma = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 1 \\ -\beta + \gamma = -2 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -\beta + 3\gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ -\beta - 3\gamma = 9. & L_4 \leftarrow L_4 + 8L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 1 \\ -\beta + \gamma = -2 \\ 2\gamma = 2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ -4\gamma = 11 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les lignes 3 et 4 sont incompatibles, donc le système n'a pas de solutions. Ainsi, $v_0 \notin \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, donc $F \notin \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

Exercice 4 (3 pts).

1. Soient $u = (a, b, c) \in E$, $u' = (a', b', c') \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
f(u + \lambda u') &= f(a + \lambda a', b + \lambda b', c + \lambda c') \\
&= (a + \lambda a')v_1 + (b + \lambda b')v_2 + (c + \lambda c')v_3 \\
&= av_1 + bv_2 + cv_3 + \lambda(a'v_1 + b'v_2 + c'v_3) \\
&= f(u) + \lambda f(u'),
\end{aligned}$$

donc f est linéaire.

2. L'ensemble K est le noyau de f , c'est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble de définition de f .
3. D'après le cours et la question précédente :

$$f \text{ est injective} \iff \ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \iff K = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

Or, $K = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ signifie que la seule combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3 égale au vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls, donc $K = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ est équivalent à la liberté de la famille (v_1, v_2, v_3) .

Ainsi, on a montré que f est injective si et seulement si (v_1, v_2, v_3) est libre.

4. Par définition, $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ est exactement l'image de f . D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)) = \dim(\text{Im } f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker f) = 3 - \dim(K).$$

5. Remarquons que $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_E$ est une relation de liaison entre v_1, v_2 et v_3 si et seulement si (a, b, c) est un vecteur non nul de K .

Supposons que $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ est un plan de E , c'est-à-dire que sa dimension est égale à 2. D'après la question précédente, K est donc de dimension 1, par conséquent c'est une droite de $\mathbb{R}^3$. Soit $u_0 := (a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ une base de K , alors $K = \text{Vect}(u_0)$. Donc tout vecteur de K est un multiple de u_0 :

$$\forall (a, b, c) \in K, \exists \lambda \in \mathbb{R}, (a, b, c) = (\lambda a_0, \lambda b_0, \lambda c_0).$$

Ainsi, toute relation de liaison $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_E$ est multiple de la relation $a_0v_1 + b_0v_2 + c_0v_3 = 0_E$.