Examen d'algèbre linéaire 1 – corrigé

1$^{\text{re}}$ session

16 janvier 2024

Exercice 1 (4 pts)**.**

1. La dimension de E est le nombre de vecteurs d'une base de E, avec la convention $\dim(E) = 0$ si $E = \{0_E\}$.
2. **a.** $\ker f = \{x \in E \,|\, f(x) = 0_E\}$
   b. $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$
   c. Si E est de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f)$.
3. Premièrement, $F \cap G$ est non vide car F et G contiennent le vecteur nul. Deuxièmement, montrons que $F \cap G$ est stable par combinaisons linéaires. Soient $u, v \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on a :
   - $u + \lambda v \in F$ car u et v sont dans F et F est stable par combinaisons linéaires ;
   - $u + \lambda v \in G$ car u et v sont dans G et G est stable par combinaisons linéaires ;

   donc $u + \lambda v \in F \cap G$. Ainsi, $F \cap G$ est stable par combinaisons linéaires. Par conséquent, $F \cap G$ est un s.e.v. de E.

Exercice 2 (6 pts)**.**

1.
$$a = (3+4\mathrm{i})^2 = 9 + 24\mathrm{i} - 16 = -7 + 24\mathrm{i}.$$
$$b = \frac{4-\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}} = \frac{(4-\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}{2^2+3^3} = \frac{8+12\mathrm{i}-2\mathrm{i}+3}{13} = \frac{11}{13} + \frac{10}{13}\mathrm{i}.$$

2. **a.** Soit $z := x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, on a :
$$z^2 = 1+\mathrm{i} \iff (x+\mathrm{i}y)^2 = 1+\mathrm{i} \iff x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 = 1 + \mathrm{i} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

On ajoute l'équation $|z|^2 = |1+\mathrm{i}|$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = \sqrt{2}+1 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2y^2 = \sqrt{2}-1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

Puisque $xy > 0$, les nombres x et y sont de même signe, donc les solutions du système sont :
$$(x,y) = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \quad \text{et} \quad (x,y) = \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right).$$

Les racines carrées de $1+\mathrm{i}$ sont donc :
$$z_1 := \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 := -z_1.$$

b. $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

c. Sous forme exponentielle, les racines carrées de $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ sont $2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ et $2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{8}}$, et sous forme algébrique, les racines carrées sont z_1 et z_2 de la question 2a. Puisque $\mathfrak{Re}(z_1)$ et $\mathfrak{Im}(z_1)$ sont positifs, l'argument principal de z_1 appartient à $[0,\frac{\pi}{2}]$, donc $z_1=2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$. Par conséquent :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}=2^{-\frac{1}{4}}z_1=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Par définition de l'exponentielle imaginaire, on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\quad\text{et}\quad\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

3. **a.** *Solution 1.* On écrit -8 sous forme exponentielle : $-8=8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$. Cherchons les racines cubiques sous forme exponentielles. Soit $w=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\in\mathbb{C}^*$ avec $r>0$ et $\theta\in[0,2\pi[$, on a :

$$\begin{aligned}
w^3=-8 &\iff r^3=8 \quad\text{et}\quad \exists k\in\mathbb{Z},\ 3\theta=\pi+2k\pi\\
&\iff r=2 \quad\text{et}\quad \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta=\frac{\pi+2k\pi}{3}\\
&\iff r=2 \quad\text{et}\quad \exists k\in\{0,1,2\},\ \theta=\frac{(2k+1)\pi}{3}. && (\text{car } \theta\in[0,2\pi[)
\end{aligned}$$

Ainsi, les racines cubiques de -8 sont :

$$w_0=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=1+\mathrm{i}\sqrt{3},\qquad w_1=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-2,\qquad w_2=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}=1-\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Solution 2. Une racine cubiques évidente de -8 est -2. On rappelle que les racines cubiques de l'unité sont 1, j et j^2 avec $j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc les racines cubiques de -8 sont :

$$w_0'=-2,\qquad w_1'=w_0'\times j=1-\mathrm{i}\sqrt{3},\qquad w_2'=w_0'\times j^2=1+\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

b. On a $\left(\frac{z-1}{z+\mathrm{i}}\right)^3=-8$ si et seulement si $\frac{z-1}{z+\mathrm{i}}$ est une racine cubique de -8. Soit w une racine cubique de -8, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{z-1}{z+\mathrm{i}}=w &\iff z-1=w(z+\mathrm{i})\\
&\iff z(1-w)=1+\mathrm{i}w\\
&\iff z=\frac{1+\mathrm{i}w}{1-w}. && (w\neq 1 \text{ d'après 3a})
\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de $\left(\frac{z-1}{z+\mathrm{i}}\right)^3=-8$ sont :

$$\begin{aligned}
z_0&=\frac{1+\mathrm{i}w_0}{1-w_0} & z_1&=\frac{1+\mathrm{i}w_1}{1-w_1} & z_2&=\frac{1+\mathrm{i}w_2}{1-w_2}\\
&=\frac{1-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}\sqrt{3}} & &=\frac{1-2\mathrm{i}}{3} & &=\frac{1+\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\mathrm{i}\sqrt{3}}\\
&=\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}-3\mathrm{i}-\sqrt{3}}{3} & &=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\mathrm{i} & &=\frac{-\mathrm{i}\sqrt{3}-3\mathrm{i}+\sqrt{3}}{3}\\
&=-\frac{\sqrt{3}}{3}+\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right) & & & &=\frac{\sqrt{3}}{3}-\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right).
\end{aligned}$$

Exercice 3 (7 pts)**.**

1.

$$\begin{cases} x-2y-\ \ 5z-3t=0 \\ -2x+5y+13z+6t=0 \\ -x+\ \ y+\ \ 3z+2t=0 \\ 3x-4y-\ \ 9z-9t=0. \end{cases} \iff \begin{cases} x-2y-5z-3t=0 & \\ \quad y+3z \quad\quad =0 & L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ -\ \ y-2z-\ \ t=0 & L_3 \leftarrow L_3+L_1 \\ \quad 2y+6z \quad\quad =0 & L_4 \leftarrow L_4-3L_1. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-2y-5z-3t=0 & \\ \quad y+3z \quad\quad =0 & \\ \quad\quad z-\ \ t=0 & L_3 \leftarrow L_3+L_2 \\ \quad\quad\quad 0=0 & L_4 \leftarrow L_4-2L_2. \end{cases}$$

2.

$$(\mathscr{S}) \iff \begin{cases} x-2y-5z-3t=0 \\ \quad y+3z \quad\quad =0 \\ \quad\quad z-\ \ t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\ \ 2t \\ y=-3t \\ z=\ \ t \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$ une variable libre. Par conséquent, $F = \{(2t, -3t, t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(v_0)$ où $v_0 = (2, -3, 1, 1)$. Le vecteur v_0 forme une base de F.

3. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On a :

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} 2\alpha+\ \ \beta+\ \ \gamma=0 \\ -\alpha-2\beta+2\gamma=0 \\ \alpha+\ \ \beta-\ \ \gamma=0 \\ -8\alpha-9\beta+5\gamma=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\ \ \beta-\ \ \gamma=0 & L_1 \leftarrow L_3 \\ -\alpha-2\beta+2\gamma=0 & \\ 2\alpha+\ \ \beta+\ \ \gamma=0 & L_3 \leftarrow L_1 \\ -8\alpha-9\beta+5\gamma=0 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\beta-\ \ \gamma=0 & \\ -\beta+\ \ \gamma=0 & L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ -\beta+3\gamma=0 & L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \\ -\beta-3\gamma=0 & L_4 \leftarrow L_4+8L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\beta-\ \ \gamma=0 & \\ -\beta+\ \ \gamma=0 & \\ 2\gamma=0 & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\ -4\gamma=0 & L_4 \leftarrow L_4-L2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0. \end{cases}$$

Donc la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

4. D'après la question précédente, (v_1, v_2, v_3) est une famille libre, donc c'est une base de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. Par conséquent, $\dim\big(\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)\big) = 3$, c'est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

5. Il suffit de montrer que le vecteur directeur de F n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. Cherchons si v_0 peut s'écrire comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3 :

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = v_0 \iff \begin{cases} 2\alpha + \ \ \beta + \ \ \gamma = 2 \\ -\alpha - 2\beta + 2\gamma = -3 \\ \ \ \alpha + \ \ \beta - \ \ \gamma = 1 \\ -8\alpha - 9\beta + 5\gamma = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ \ \alpha + \ \ \beta - \ \ \gamma = 1 & L_1 \leftarrow L_3 \\ -\alpha - 2\beta + 2\gamma = -3 \\ 2\alpha + \ \ \beta + \ \ \gamma = 2 & L_3 \leftarrow L_1 \\ -8\alpha - 9\beta + 5\gamma = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta - \ \ \gamma = 1 \\ \ \ -\beta + \ \ \gamma = -2 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \ \ -\beta + 3\gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ \ \ -\beta - 3\gamma = 9. & L_4 \leftarrow L_4 + 8L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta - \ \ \gamma = 1 \\ \ \ -\beta + \ \ \gamma = -2 \\ \qquad 2\gamma = 2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \qquad -4\gamma = 11 & L_4 \leftarrow L_4 - L2 \end{cases}$$

Les lignes 3 et 4 sont incompatibles, donc le système n'a pas de solutions. Ainsi, $v_0 \notin \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, donc $F \not\subset \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

Exercice 4 (3 pts)**.**

1. Soient $u = (a, b, c) \in E$, $u' = (a', b', c') \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(u + \lambda u') &= f(a + \lambda a',\ b + \lambda b',\ c + \lambda c') \\ &= (a + \lambda a')v_1 + (b + \lambda b')v_2 + (c + \lambda c')v_3 \\ &= av_1 + bv_2 + cv_3 + \lambda(a'v_1 + b'v_2 + c'v_3) \\ &= f(u) + \lambda f(u'), \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

2. L'ensemble K est le noyau de f, c'est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble de définition de f.

3. D'après le cours et la question précédente :

$$f \text{ est injective} \iff \ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \iff K = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

Or, $K = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ signifie que la seule combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3 égale au vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls, donc $K = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ est équivalent à la liberté de la famille (v_1, v_2, v_3).
Ainsi, on a montré que f est injective si et seulement si (v_1, v_2, v_3) est libre.

4. Par définition, $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ est exactement l'image de f. D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim\big(\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)\big) = \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker f) = 3 - \dim(K).$$

5. Remarquons que $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_E$ est une relation de liaison entre v_1, v_2 et v_3 si et seulement si (a, b, c) est un vecteur non nul de K.
Supposons que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ est un plan de E, c'est-à-dire que sa dimension est égale à 2. D'après la question précédente, K est donc de dimension 1, par conséquent c'est une droite de $\mathbb{R}^3$. Soit $u_0 := (a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ une base de K, alors $K = \mathrm{Vect}(u_0)$. Donc tout vecteur de K est un multiple de u_0 :

$$\forall (a, b, c) \in K,\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ (a, b, c) = (\lambda a_0, \lambda b_0, \lambda c_0).$$

Ainsi, toute relation de liaison $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_E$ est multiple de la relation $a_0v_1 + b_0v_2 + c_0v_3 = 0_E$.