Examen d'algèbre linéaire 1

1re session

16 janvier 2024

Durée : 2 heures (tiers temps : 2 heures 40 minutes).

Barème : 20 points (répartition indicative).

Nombre de pages : 1.

Consignes :

- Documents, calculatrices, tablettes, smartphones et smartwatchs interdites.
- Les réponses doivent être rédigées soigneusement et les calculs suffisamment détaillés.
- Les réponses non justifiées ne sont pas prises en compte et ne rapportent pas de points.
- Le sujet comporte 4 exercices indépendants qui peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 (4 pts)**.** *Questions de cours.*

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Qu'appelle-t-on la dimension de E ?
2. Soient E et F des espaces vectoriels, soit $f\colon E \to F$ une application linéaire.
   - **a.** Énoncer la définition du noyau de f.
   - **b.** Énoncer la définition du rang de f.
   - **c.** Énoncer le théorème du rang (sans oublier d'hypothèses).
3. Soit E un espace vectoriel et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2 (6 pts)**.**

1. Calculer la forme algébrique des nombres $a = (3+4\mathrm{i})^2$ et $b = \frac{4-\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$.
2. - **a.** Calculer les racines carrées de $1+\mathrm{i}$ sous forme algébrique.
   - **b.** Mettre sous forme exponentielle le nombres $1+\mathrm{i}$.
   - **c.** En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
3. - **a.** Déterminer les racines cubiques (racines « troisièmes ») de -8 dans $\mathbb{C}$.
   - **b.** En déduire les solutions de l'équation $\left(\frac{z-1}{z+\mathrm{i}}\right)^3 = -8$ sous forme algébrique.

Exercice 3 (7 pts)**.** Soit $(\mathscr{S})$ le système linéaire d'inconnues $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x-2y-5z-3t=0 \\ -2x+5y+13z+6t=0 \\ -x+y+3z+2t=0 \\ 3x-4y-9z-9t=0. \end{cases}$$

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé par les solutions de $(\mathscr{S})$.

1. Appliquer l'algorithme d'élimination de Gauss pour échelonner le système $(\mathscr{S})$. On trouvera que le système est de rang 3.
2. Résoudre le système $(\mathscr{S})$ et en déduire une base de F.
3. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une famille libre, où v_1, v_2 et v_3 sont les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$v_1 = (2;-1;1;-8), \quad v_2 = (1;-2;1;-9), \quad v_3 = (1;2;-1;5).$$

4. En déduire que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.
5. Montrer que $F \not\subset \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

Exercice 4 (3 pts)**.** Soit E un espace vectoriel, et soient v_1, v_2 et v_3 des vecteurs de E. On considère l'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to E$ définie pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ par $f(a,b,c) = av_1 + bv_2 + cv_3$, et on considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$K = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_E\right\}.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Quel lien faites-vous entre K et f ? En déduire que K est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre si et seulement si f est injective.
4. Exprimer la dimension de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ en fonction de celle de K.
5. En déduire que si $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ est un plan vectoriel de E, alors la famille (v_1, v_2, v_3) est liée et toutes les relations de liaison entre les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont multiples les unes des autres.