Algèbre linéaire 1
L1 MIPI 2023-2024

Corrigé de l'examen d'algèbre linéaire 1

1re session

9 janvier 2024

Exercice 1 (7,5 points)**.**

1. *(2 pts)* Calculons $z_1 - z_2$:

$$z_1 - z_2 = (4+\mathrm{i}) - (-2+3\mathrm{i}) = 4+\mathrm{i}+2-3\mathrm{i} = 6-2\mathrm{i}.$$

Calculons z_1/z_2 :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+\mathrm{i}}{-2+3\mathrm{i}} = \frac{(4+\mathrm{i})(-2-3\mathrm{i})}{|-2+3\mathrm{i}|^2} = \frac{-8-12\mathrm{i}-2\mathrm{i}+3}{(-2)^2+3^2} = \frac{-5-14\mathrm{i}}{13} = -\frac{5}{13} - \frac{14}{13}\mathrm{i}.$$

2. *(1,5 pt)* Soit $\theta \in \mathbb{R}$, linéarisons $\sin^3(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\sin^3(\theta) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^3 && \text{(formule d'Euler)}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\theta}}{(2\mathrm{i})^3} && \text{(binôme de Newton)}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\theta}}{-8\mathrm{i}}\\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\theta}\right) - 3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)}{-8\mathrm{i}}\\
&= \frac{2\mathrm{i}\sin(3\theta) - 6\mathrm{i}\sin(\theta)}{-8\mathrm{i}} && \text{(formule d'Euler)}\\
&= -\frac{1}{4}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin(\theta).
\end{aligned}$$

3. *(1 pt)* L'équation $z^n = 1$ admet n solutions dans $\mathbb{C}$. Ce sont les racines n-ièmes de l'unité, dont l'expression est donnée par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \zeta_n^k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{n}}.$$

4. *(2 pt)* Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a :

$$\begin{aligned}
\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff \begin{cases} \alpha - \beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha \quad\;\; + \;\; \gamma = 0 \\ \qquad \beta + \;\; \gamma = 0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \alpha - 4\beta \quad = 0 \\ 2\alpha - \beta \quad = 0 \\ \qquad\qquad \gamma = -\beta \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \alpha \qquad\quad = 4\beta \\ \quad 7\beta \quad = 0 \\ \qquad\qquad \gamma = -\beta \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent, la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

Remarque : le fait que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 soient 2 à 2 non colinéaires ne suffit pas pour conclure qu'ils sont libres !

5. *(1 pt)* D'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exercice 2 (5,5 points)**.**

1. *(2 pts)* On applique l'algorithme du pivot de Gauss au système $(\mathscr{S})$:

$$\begin{cases} 2x + y + t = 0 \\ -x + 10y + 6z + 4t = 0 \\ -x + 3y + 2z + t = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z + t = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ -x + 10y + 6z + 4t = 0 \\ 2x + y + t = 0 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z + t = 0 \\ 7y + 4z + 3t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 7y + 4z + 3t = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z + t = 0 \\ 7y + 4z + 3t = 0 \\ 0 = 0. & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Le système $(\mathscr{S})$ est équivalent à un système échelonné de rang 2.

2. *(1,5 pt)* On choisit comme inconnues principales x et z, et comme inconnues secondaires y et t :

$$(\mathscr{S}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 2z + t \\ z = -\frac{7}{4}y - \frac{3}{4}t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3y + \left(-\frac{7}{2}y - \frac{3}{2}t\right) + t \\ z = -\frac{7}{4}y - \frac{3}{4}t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}t \\ z = -\frac{7}{4}y - \frac{3}{4}t. \end{cases}$$

Cherchons une base de F. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{aligned} u \in F &\Longleftrightarrow u \text{ est solution de } (\mathscr{S}) \\ &\Longleftrightarrow u = \left(-\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}t,\ y,\ -\tfrac{7}{4}y - \tfrac{3}{4}t,\ t\right) \\ &\Longleftrightarrow u = y\,v_1 + t\,v_2, \end{aligned}$$

où $v_1 = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{7}{4}, 0\right)$ et $v_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{4}, 1\right)$. Par conséquent, F est engendré par v_1 et v_2. De plus, v_1 et v_2 sont libres car ils sont non colinéaires. Donc (v_1, v_2) est une base de F.

3. *(1 pt)* La base de F trouvée précédemment comporte 2 vecteurs, donc $\dim(F) = 2$.

4. *(1 pt)* Montrons que $F \cap D = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. On sait que $F \cap D$ est un s.e.v. de D et que D est de dimension 1, donc :

- soit $\dim(F \cap D) = 1$, et dans ce cas $F \cap D = D$;
- soit $\dim(F \cap D) = 0$, et dans ce cas $F \cap D = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Or, le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ n'appartient pas à F car il n'est pas solution du système $(\mathscr{S})$, donc D n'est pas inclus dans F. Par conséquent, $F \cap D \neq D$, donc $F \cap D = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Les s.e.v. F et D sont en somme directe.

5. *(Bonus +1 pt)* Les s.e.v. F et D ne sont pas supplémentaires, car $\dim(F) + \dim(D) = 3 \neq \dim(\mathbb{R}^4)$.

Exercice 3 (3 points)**.**

1. *(1 pt)* Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ dans $\mathbb{R}^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(u + \lambda v) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \\ &= \big(3(x + \lambda x') - 4(y + \lambda y') + 2(z + \lambda z'),\quad 2(x + \lambda x') + 3(y + \lambda y') - 5(z + \lambda z')\big) \\ &= (3x - 4y + 2z,\ 2x + 3y - 5z) + \lambda(3x' - 4y' + 2z',\ 2x' + 3y' - 5z') \\ &= f(u) + \lambda f(v). \end{aligned}$$

Par conséquent, f est une application linéaire.

2. *(1 pt)* Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
u \in \ker f &\iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \\
&\iff \begin{cases} 3x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x - \ 4y + \ 2z = 0 \\ \qquad 19y - 17z = 0 \quad L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x = \frac{4\times 17}{19} z - 2z \\ \ y = \frac{17}{19} z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \frac{14}{19} z \\ y = \frac{17}{19} z \end{cases} \\
&\iff u = \left(\tfrac{14}{19} z, \tfrac{17}{19} z, z\right) \\
&\iff u = \tfrac{z}{19}(14, 17, 19).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\ker f = \mathrm{Vect}\big((14, 17, 19)\big)$. Puisque le vecteur $(14, 17, 19)$ est non nul, il forme une base de $\ker f$.

3. *(0,5 pt)* Le noyau de f n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc f n'est pas injective.
Remarque : une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *ne peut jamais être injective, car le théorème du rang implique alors que* $\dim(\ker f) = 3 - \mathrm{rg}(f) \geq 1$ *puisque* $\mathrm{rg}(f) \leq 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. *Donc* $\ker f$ *est nécessairement non réduit à l'espace nul.*

4. *(0,5 pt)* D'après le théorème du rang, on a :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker f) = 3 - 1 = 2.$$

Ainsi, $\mathrm{Im}\, f$ est un s.e.v. de dimension 2 de $\mathbb{R}^2$, donc $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$. Par conséquent, f est surjective.

Exercice 4 (4 points)**.**

1. *(1 pt)* Calculons les modules de z_1 et z_2 : On a :

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2, \qquad |z_2| = 2 \times |\mathrm{i}| = 2.$$

Écrivons z_1 sous forme trigonométrique :

$$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}},$$

donc $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$. Enfin, z_2 est un nombre imaginaire pur de partie imaginaire positive, donc $\arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

2. **a.** *(0,5 pt)* Le discriminant de ce polynôme est :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(\sqrt{3} + 3\mathrm{i}\right)^2 - 4 \times \left(-2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}\right) \\
&= 3 + 6\sqrt{3}\mathrm{i} - 9 + 8 - 8\sqrt{3}\mathrm{i} \\
&= 2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

b. *(1 pt) Il y avait 2 façons de calculer les racines carrées de* Δ *: en utilisant la forme algébrique et en utilisant la forme trigonométrique.*
Méthode 1. Soit $\delta = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On a :

$$\delta^2 = \Delta \iff x^2 + 2xy\mathrm{i} - y^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ \quad 2xy = -2\sqrt{3}. \end{cases}$$

De plus :

$$\delta^2 = \Delta \implies |\delta|^2 = |\Delta| \implies x^2 + y^2 = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4.$$

Ainsi, on a :

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 2 \\ \quad 2xy = -2\sqrt{3}. \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x^2 = 6 \\ 2y^2 = 2 \\ 2xy = -2\sqrt{3}. \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \ x^2 = 3 \\ \ y^2 = 1 \\ 2xy = -2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Puisque $xy < 0$, les réels x et y sont de signes opposés, donc les solutions de ce système sont $(x, y) = (\sqrt{3}, -1)$ et $(x, y) = (-\sqrt{3}, 1)$. Ainsi, les racines carrées de Δ sont $\delta = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $-\delta = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

Méthode 2. Écrivons Δ sous forme trigonométrique :

$$\Delta = 4\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

Les racines carrées de Δ sont donc :

$$\delta = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3} - \mathrm{i},$$

et son opposé $-\delta = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

c. *(0,5 pt)* Les solutions de $(\mathscr{E})$ sont :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + 3\mathrm{i} + \delta}{2} = \frac{\sqrt{3} + 3\mathrm{i} + \sqrt{3} - \mathrm{i}}{2} = \sqrt{3} + \mathrm{i},$$
$$z_2 = \frac{\sqrt{3} + 3\mathrm{i} - \delta}{2} = \frac{\sqrt{3} + 3\mathrm{i} - \sqrt{3} + \mathrm{i}}{2} = 2\mathrm{i},$$

c'est-à-dire les nombres z_1 et z_2 de la question 1.

3. *(1 pt)* En faisant le changement de variable $w^3 = z$, l'équation $(\mathscr{E}')$ revient à l'équation $(\mathscr{E})$ dont les solutions sont z_1 et z_2. Par conséquent, les solutions de $(\mathscr{E}')$ sont les $w \in \mathbb{C}$ tels que $w^3 = z_1$ ou $w^3 = z_2$, c'est-à-dire les racines cubiques de z_1 et de z_2. On a vu à la question 1 des formes trigonométriques de z_1 et z_2 :

$$z_1 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}, \qquad z_2 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}.$$

Les racines cubiques de z_1 et z_2 sont respectivement w_0, w_1, w_2 et w'_0, w'_1, w'_2, où :

$$\forall k \in \{0, 1, 2\}, \qquad w_k = 2^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}\right)} \quad \text{et} \quad w'_k = 2^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)}.$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E}')$ est :

$$S = \left\{2^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}, \quad 2^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{12}}, \quad 2^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{12}}, \quad 2^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}, \quad 2^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}, \quad 2^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}\right\}.$$