CY TECH
sciences
et techniques

Algèbre linéaire 1
L1 MIPI 2023-2024

Examen d'algèbre linéaire 1

1$^{\text{re}}$ session

9 janvier 2024

Durée : 2 heures (tiers temps : 2 heures 40 minutes).

Barème : 20 points.

Nombre de pages : 1.

Consignes :

- Documents, calculatrices, tablettes, smartphones et smartwatchs interdites.
- Les réponses doivent être rédigées soigneusement et les calculs suffisamment détaillés.
- Les réponses non justifiées ne sont pas prises en compte et ne rapportent pas de points.
- Le sujet comporte 4 exercices indépendants qui peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 (7,5 points)**.** *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Soient $z_1 = 4+\mathrm{i}$ et $z_2 = -2+3\mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique de $z_1 - z_2$ et du quotient z_1/z_2.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^3(\theta)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien l'équation $z^n = 1$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{C}$? Donner l'expression de celles-ci.
4. Soient $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (-1,0,1)$ et $v_3 = (3,1,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminer si la famille (v_1, v_2, v_3) est libre ou liée.
5. Soit E un espace vectoriel et soient F et G des sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E. Écrire une relation entre $\dim(F)$, $\dim(G)$, $\dim(F+G)$ et $\dim(F\cap G)$.

Exercice 2 (5,5 points)**.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel :

$$F := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, 2x+y+t=0 \quad \text{et} \quad -x+10y+6z+4t=0 \quad \text{et} \quad -x+3y+2z+t=0\right\}.$$

1. À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, montrer que le système :

$$\begin{cases} 2x+y+t=0 \\ -x+10y+6z+4t=0 \\ -x+3y+2z+t=0 \end{cases} \tag{$\mathscr{S}$}$$

   est équivalent à un système échelonné formé de deux équations.
2. En choisissant deux variables comme paramètres et deux autres variables comme inconnues dans le système échelonné précédent, déterminer une base de F.
3. Quelle est la dimension de F ?
4. Soit D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,1,1)$. Démontrer que F et D sont en somme directe.
5. **(Bonus)** Les sous-espaces vectoriels F et D sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 3 (3 points)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) := (3x-4y+2z, \quad 2x+3y-5z).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base du noyau de f.
3. L'application f est-elle injective ?
4. Montrer à l'aide du théorème du rang que f est surjective.

Exercice 4 (4 points)**.**

1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes $z_1 = \sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $z_2 = 2\mathrm{i}$.
2. L'objectif de cette question est de résoudre l'équation :

$$z^2 - \left(\sqrt{3}+3\mathrm{i}\right)z - 2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i} = 0. \tag{$\mathscr{E}$}$$

   On note Δ le discriminant du polynôme $z^2 - \left(\sqrt{3}+3\mathrm{i}\right)z - 2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.
   - **a.** Montrer que $\Delta = 2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.
   - **b.** Calculer les racines carrées complexes de Δ. On pourra chercher celles-ci sous la forme $\delta = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
   - **c.** En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(\mathscr{E})$.
3. Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$w^6 - \left(\sqrt{3}+3\mathrm{i}\right)w^3 - 2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i} = 0. \tag{$\mathscr{E}'$}$$

   On donnera les résultats sous forme exponentielle.