CORRIGÉ du Sujet d'EXAMEN "d'ALGEBRE LINÉAIRE 1"
SESSION 1° - 10.01.2023

EXERCICE 1 :

(1 et 2) $|u| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow u = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$|v| = \sqrt{\frac{(\sqrt{3})^2}{2^2}+\frac{1^2}{2^2}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)i = e^{-i\pi/6}$

$\arg u = \frac{\pi}{4}$; $\arg v = -\frac{\pi}{6}$

(3) $|w| = \left|\frac{u}{v}\right| = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ et $w = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

donc $\arg w = \frac{5\pi}{12}$

(4) $w = \frac{u}{v} = \frac{1+i}{\frac{\sqrt{3}-i}{2}} = \frac{2(1+i)(\sqrt{3}+i)}{|\sqrt{3}-i|^2} = \frac{\cancel{2}\left(\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i\right)}{\cancel{(\sqrt{4})^2}\,2}$

(5) Par comparaison des résultats obtenus à (3) et (4) :

$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) = w = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$ on déduit par l'unicité d'écriture d'un nb. complexe que :

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

(6) On a vu que $w = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$, or $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}$

Donc $w = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$

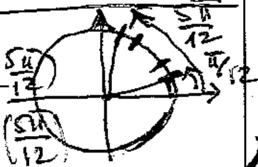
On en déduit : $e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\,\frac{w}{1+i\sqrt{3}} \overset{(4)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i}{1+i\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\left((\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i\right)(1-\sqrt{3}i)}{(\sqrt{4})^2} = \frac{(\sqrt{3}-1+3+\sqrt{3})+(\sqrt{3}+1-3+\sqrt{3})i}{4\sqrt{2}}$

$= \frac{\cancel{2}(1+\sqrt{3})}{2\cancel{4}\sqrt{2}} + \frac{\cancel{2}(-1+\sqrt{3})}{\cancel{4}_2\sqrt{2}}i$

donc $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Autrement :
$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$



(7.a) Variante 1 : $-i = e^{-i\pi/2}$ d'où : $\delta^2 = 10e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ qui a les solutions : $\delta_k = \sqrt{10}\,e^{i\left(\frac{-\pi/2}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right)}$, $k=0,1$

donc $\delta_0 = \sqrt{10}e^{-i\pi/4}$ ou $\delta_1 = \sqrt{10}e^{i3\pi/4}$.

Variante 2 : $\delta = a+ib \Rightarrow \delta^2 = a^2-b^2+i\cdot 2ab$. Donc

$\delta^2 = -10i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \text{ ou } a=-b \\ ab=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm\sqrt{5} \\ b=\mp\sqrt{5} \end{cases}$

Donc $\delta_{\pm} = \sqrt{5}(\pm 1 \mp i)$

Ceci correspond à ce qu'on a obtenu à "Variante 1"

car $\delta_0 = \sqrt{10}e^{-i\pi/4} = \sqrt{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) = \sqrt{5}(1-i) = \delta_+$

et $\delta_- = -\delta_+$ ce qui est vrai aussi pour $\delta_1 = -\delta_0$.
(voir cercle trigo)

(7.b) $z^3 - v^3z + u^3 - u\,v^3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z^3+u^3) - v^3(z+u) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z+u)(z^2-zu+u^2-v^3) = 0$

$\Leftrightarrow z = -u$ ou z racine de (E').

(7.c) Δ pour (E') est $\Delta = (-u)^2 + 4\cdot 1\cdot(v^3-u^2)$
$= -3u^2 + 4v^3$.

En revenant aux déf. de u et v :

$\Delta = -3\cdot(e^{i\pi/4})^2(\sqrt{2})^2 + 4(e^{-i\pi/6})^3 =$

$= -6e^{i\pi/2} + 4e^{-i\pi/2} = -6i + 4(-i) = -10i$

Les racines de (E') sont :

$z_{\pm} = \frac{-(-u)\pm\delta}{2}$ où δ est une des sol. de $\delta^2 = -10i$

Mais celles-ci ont été calculées à (7.a). Si on prend

$\delta_0 = \sqrt{5}(1+i)$ on a : $z_{\pm} = \frac{u\pm\delta_0}{2} = \frac{1}{2}\left((1+i)\pm\sqrt{5}(1-i)\right)$
$= \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} + \frac{1\mp\sqrt{5}}{2}i$

EXERCICE 2 : (1) $u = \begin{pmatrix} a-b \\ a+2b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b \\ 2b \\ b \end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_2}$

(2) Oui $\mathcal{L} = \{w_1, w_2\}$ est libre car les coordonnées de w_1 et w_2 ne sont pas proportionnelles : $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{2}$. (On rappelle que ce critère de proportionalité ne fonctionne que s'il s'agit de deux vecteurs).

(3) $u_{a,b}$ et v sont liés ssi leur coordonnées sont proportionnelles, i.e. $\frac{a-b}{-2} = \frac{a+2b}{7} = \frac{b}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-3b = -2b \\ 3a+6b = 7b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b=0 \\ \cancel{3a-b=0} \end{cases}$

(4). La somme est directe ssi la famille $\{v, w_2\}$ est libre. C'est le cas, car leur coordonnées ne sont pas proportionnelles. On a : $\text{Vect}\{v, w_2\} = \text{Vect}\{v\} \oplus \text{Vect}\{w_2\}$ donc sa dimension vaut 2.

(5) Il suffit de montrer que la famille $\{v, w_1, w_2\}$ n'est pas libre. Or, en supposant pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$: $\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma v = 0_{\mathbb{R}^3}$ ceci équivaut au système

$(S) \begin{cases} \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 7\gamma = 0 \\ \beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \overset{\text{Pivot}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 3\beta + 9\gamma = 0 \\ \beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 3\beta + 9\gamma = 0 \end{cases}$ le système étant complètement échelonné, il admet une infinité de solutions et non seulement $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Donc $\{v, w_1, w_2\}$ n'est pas libre donc on a en vérité : (voir (4)) : $\underbrace{\text{Vect}\{v\} \oplus \text{Vect}\{w_2\}}_{\text{de dimension} = 2} = \text{Vect}\{v\} + \text{Vect}\{w_1\} + \text{Vect}\{w_2\}$.

EXERCICE 3 : (1) Bien qu'on ait $f(0,0,0) = (0,0,0)$ (i.e. le "test de l'origine est satisfait) f est défaillante à la linéarité par la 3-ème coordonnée de son image : Par ex : $f(2x, 2y, 2z) = (2y, 0, 2^2 xy) = 2(y, 0, 2xy) \neq$

$\neq 2(y, 0, xy) = 2f(x,y,z)$

dès lors que $xy \neq 0$. Donc par ex. pour $x = y = 1$.

(2.a) $\text{Ker}\, g \overset{\text{déf.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{g(x,y,z) = (0,0,0)}_{(*)}\}$

Or $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \overset{\text{Pivot}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ \cancel{3y + z = 0} \end{cases}$

le rang du système $= 2 < 3 =$ nb. des inconnues, donc on prend une des inconnues comme paramètre, par ex. $y = \lambda$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ d'où

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases} \forall \lambda$; D'où $\text{Ker}\, g = \left\{\begin{pmatrix} 4\lambda \\ \lambda \\ -3\lambda \end{pmatrix} \middle| \forall \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$

donc ce seul vecteur $\neq 0_{\mathbb{R}^3}$ forme la base $\mathcal{K} = \left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$ de $\text{Ker}\, g$.

(2.b) g n'est pas injective car si c'était le cas, on aurait $\text{Ker}\, g = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ce qui est faux cf (2.a)

(2.c) Par le Thm du rang, on a :

$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{\text{esp. de départ pour } g} = 3 = \underbrace{\dim \text{Ker}\, g}_{= 1 \text{ par (2.a)}} + \underbrace{\dim \text{Im}\, g}_{\text{rang } g}$

d'où $\dim \text{Im}\, g = 3 - 1 = 2$.

(2.d) g n'est pas surjective, car si c'était le cas on aurait (par déf.) $\operatorname{Im} g = \underset{\text{esp. d'arrivée}}{\underline{\mathbb{R}^3}}$

or $\dim \operatorname{Im} g = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$

donc $\operatorname{Im} g \subsetneq \mathbb{R}^3$.

(2.e) Si $\mathcal{B}$ est base canonique dans $\mathbb{R}^3$ (vu comme esp. de départ) on sait que

$$\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}\{g(e_1); g(e_2); g(e_3)\}$$

où $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Donc $\mathcal{G} = \left\{g\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; g\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; g\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right\}$

(2.f) D'après (2.c) une base de $\operatorname{Im} g$ sera donnée en choisissant dans $\mathcal{G}$ une sous-famille à 2 vecteurs qui soit libre. Il suffit donc de choisir deux vect. non-proportionnels de $\mathcal{G}$ donc par ex : $\mathcal{Y} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ est base de $\operatorname{Im} g$

car $\frac{1}{-1} \neq \frac{2}{1}$

(2.g) $\mathcal{S} = \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}$ est libre ssi

$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$\underbrace{\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \overset{\text{Pivot}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ 3\beta + 5\gamma = 0 \\ \cancel{3\beta + 5\gamma = 0} \end{cases}$$

Donc le système étant échelonné il admet une infinité de solutions (car son rang $= 2 < 3$ nb d'inconn.) donc $\mathcal{S}$ n'est pas libre, et donc la somme $\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} g$ ne peut être directe.

(2.h) La famille de vecteurs $\mathcal{K} \cup \mathcal{Y}$ étant liée, il s'en suit que le vecteur de $\mathcal{K}$ (qui est seul) et qui engendre $\operatorname{Ker} g$ est combinaison linéaire des vect. de $\mathcal{Y}$. Donc $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect} \mathcal{K} \subset \operatorname{Vect} \mathcal{Y} = \operatorname{Im} g$

Donc $\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} g$.

Donc toute base de $\operatorname{Im} g$ est base de $\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} g$ par ex. $\mathcal{Y}$ est base de $\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} g$.

(i) $(S_{a,b,c}) \begin{cases} x - y + z = a \\ 2x + y + 3z = b \\ x + 2y + 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = a \\ 3y + z = -2a + b \\ 3y + z = -a + c \end{cases}$

qui est compatible ssi $-2a + b = -a + c \Leftrightarrow a - b + c = 0$

(j) $\operatorname{Im} g = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid (S_{a,b,c}) \text{ est compatible}\} =$
$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \mid a - b + c = 0\}$ donc

$u = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \operatorname{Im} g \Leftrightarrow u = \begin{pmatrix}a\\a+c\\c\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$