Examen d'Algèbre Linéaire 1

Durée : 2h

Les documents, les smartphones, les tablettes, les smartwatch et les calculatrices ne sont pas autorisés

Les exercices sont indépendants. Bien soigner la rédaction. ***Toute réponse sans justification vaut zéro***

Les questions marquées d'un astérisque sont un peu plus difficiles : les laisser pour la fin

EXERCICE 1 : *Soit les nombres complexes* $u = 1 + i$ *et* $v = \dfrac{\sqrt{3} - i}{2}$.

1. *Calculer le module et l'argument pour chacun des nombres* u *et* v.
2. *Écrire* u *et* v *sous une forme exponentielle.*
3. *En déduire le module et l'argument de* $w = \dfrac{u}{v}$.
4. *Calculer* w *par des moyens algébriques et en déduire la forme algébrique de* w.
5. *En comparant les résultats obtenus aux deux questions précédentes, en déduire les valeurs de* $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ *et de* $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

6.* *(Question BONUS) Utiliser les propriétés de l'exponentielle complexe pour en déduire les valeurs de* $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et de* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

7. *On se propose de résoudre l'équation (E) :* $z^3 - v^3 z + u^3 = uv^3$.

7.a) *Résoudre en* $\mathbb{C}$ *l'équation* $\delta^2 = -10i$.
(Indication : on pourrait mettre $-i$ *sous forme exponentielle puis la résoudre, ou bien travailler avec une forme algébrique a priori* $\delta = a + ib$.*)*

7.b)* *Montrer que les solutions de (E) sont soit* $z = -u$ *soit les solutions de l'équation*

(E') : $z^2 - uz + u^2 - v^3 = 0$.

(Indication : utiliser l'identité remarquable $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ *)*

7.c) *Calculer le discriminant de (E'), puis en s'aidant de la question (7.a) trouver les deux solutions de (E'), qu'on présentera sous forme algébrique.*

EXERCICE 2 : *Soit en* $\mathbb{R}^3$ *les vecteurs* $\boldsymbol{u}_{a,b} = \begin{pmatrix} a - b \\ a + 2b \\ b \end{pmatrix}$ *et* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ *où* a *et* b *sont des paramètres réels. (on a mis les vecteurs en lettres grasses pour les distinguer des scalaires)*

1. *Mettre* $\boldsymbol{u}_{a,b}$ *sous forme de combinaison linéaire* $a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{w}_2$ *en spécifiant qui sont les vecteurs (fixes)* $\boldsymbol{w}_1$ *et* $\boldsymbol{w}_2$ *de* $\mathbb{R}^3$.
2. *La famille* $\mathscr{S} = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ *est-elle libre ? Justifier.*
3. *Montrer que* $\{\boldsymbol{u}_{a,b}, \boldsymbol{v}\}$ *est une famille liée de vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si le couple le* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *vérifie* $3a - b = 0$.
4. *Montrer que la somme Vect*$\{\boldsymbol{v}\}$ + *Vect*$\{\boldsymbol{w}_2\}$ *est directe. Que vaut* $\dim$ *Vect*$\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2\}$ *?*
5. *Montrer que la somme Vect*$\{\boldsymbol{v}\}$ + *Vect*$\{\boldsymbol{w}_1\}$ + *Vect*$\{\boldsymbol{w}_2\}$ *n'est pas directe. Que vaut sa dimension ?*

Tourner la page s.v.p. —>

EXERCICE 3 : *Soit f et g deux applications $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définies comme suit :*
$\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (y, 0, xy) \quad$ *et*
$\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x,y,z) = (x-y+z, 2x+y+3z, x+2y+2z).$

1. *Montrer que f n'est pas une application linéaire.*

2. *Supposons connu que g est linéaire.*

2.a) *Calculer $\mathrm{Ker}(g)$, le sous-espace noyau de g, en indiquant une base de celui-ci, que l'on notera par $\mathscr{K}$.*

2.b) *L'application g est-elle injective ?*

2.c) *Calculer le rang de g, autrement dit la dimension du sous-espace image $\mathrm{Im}(g)$.*

2.d) *L'application g est-elle surjective ?*

2.e) *Donner une famille génératrice $\mathscr{G}$ de $\mathrm{Im}(g)$ formée de 3 vecteurs. $\mathscr{G}$ est-elle une base de $\mathrm{Im}(g)$?*

2.f) *Calculer le sous-espace image $\mathrm{Im}(g)$ en indiquant une base $\mathscr{I}$ de celui-ci.*

2.g) *Soit $\mathscr{S} = \mathscr{K} \cup \mathscr{I}$. La famille de vecteurs $\mathscr{S}$ est-elle libre ? La somme de sous-espaces $\mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(g)$ est-elle directe ?*

2.h) *Préciser qui est le sous-espace somme $\mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(g)$ et indiquer une de ses bases.*

2.i) *Soit a, b et c des paramètres réels. Trouver par la methode du pivot (de Gauss) une condition nécessaire et suffisante sur le triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour qu'un système ($S_{a,b,c}$) du type* $\left\{\begin{array}{lcl} x-y+z &=& a \\ 2x+y+3z &=& b \\ x+2y+2z &=& c \end{array}\right.$ *admette (au moins) une solution, autrement dit, qu'il ne soit pas incompatible.*

2.j) *(Question BONUS) En déduire une définition du sous-espace image $\mathrm{Im}(g)$ en termes d'un système d'équation(s) en inconnues a, b, c et, à partir de cette définition, retrouver une base de $\mathrm{Im}(g)$.*