CORRIGÉ de l'EXAMEN d'ALGÈBRE LINÉAIRE 1
SESSION 2 : 22.06.2022

EXERCICE 1 : $u = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $v = -1+i$

(1) $|u| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$; $|v| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow v = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \arg(u) = \frac{5\pi}{6}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \arg(v) = \frac{3\pi}{4}$

(2) $u = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = e^{i5\pi/6}$

$v = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$

(3) $w = \frac{u}{v} = \frac{e^{i5\pi/6}}{\sqrt{2}e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$

donc $|w| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\arg(w) = \frac{\pi}{12}$

(4) Par calcul algébrique (i.e. en utilisant la forme algébrique de u et v) on a :

$$w = \frac{\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)}{-1+i} = \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{|1-i|^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{2})^2} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)}_{\text{ça va nous être utile à (5)}}$$

$$= \frac{1}{4}\left((\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)\right)$$

(5) En comparant la forme exponentielle de w obtenue à (3) et celle vue à (4) i.e. on en déduit

$$e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

(6) Compte tenu de la forme exponentielle de $v = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$

on a : $z^3 = \frac{1}{4}v \Leftrightarrow z^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i3\pi/4}$ $(*)$

En particulier, $(*) \Rightarrow |z|^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Géométriquement, ceci dit que les 3 racines de $(*)$ se trouvent sur le cercle centré en $O_{\mathbb{C}}$ de rayon $= \frac{1}{\sqrt{2}}$, et on sait aussi que ces 3 racines sont dans les sommets d'une figure 3-polygonale régulière, i.e. triangle équilatéral. Cf CM on a, si $\theta = 3\pi/4$: les racines sont :

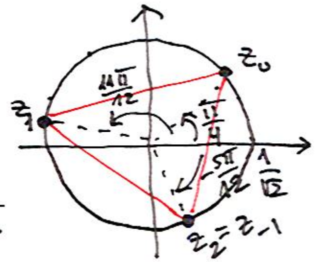
$$z_k = \underbrace{\sqrt[3]{\frac{1}{2\sqrt{2}}}}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0,1,2$$

Or $k=0 \Rightarrow z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}/3} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$k=1 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}/3+\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{11\pi}{12}}$

$k=2 \Rightarrow z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}/3+\frac{2\cdot2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{19\pi}{12}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$



EXERCICE 2 :

(1) Puisqu'il s'agit seulement de deux vecteurs, on sait qu'ils sont liés ssi leur coordonnées sont proportionnelles. Or, dans ce cas, on aurait : $\frac{a}{-1} = \frac{8}{a^2} = \frac{6}{3}$. Le plus simple est de prendre à part $\frac{6}{3} = \frac{a}{-1} \Leftrightarrow a = -2$ qui est une cond. nécessaire et de vérifier que cette unique valeur de a satisfait aussi, par ex : $\frac{8}{a^2} = \frac{6}{3}$.

Or $\frac{8}{a^2} = \frac{8}{(-2)^2} = \frac{8}{4} = 2 = \frac{6}{3}$. Donc $\boxed{a=-2}$ ssi $\{u_a, v_a\}$ liée.

(2) Si $a=0$ c'est que $a \neq -2$ (valeur unique déduite précédemment pour que $\{u_a, v_a\}$ soit liée) donc $\{u_0, v_0\}$ est forcément famille libre.

(3) On veut trouver l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. la famille à 3 vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ soit liée.

Mais comme "lié" est la négation de "libre", il est plus commode de trouver d'abord la complémentaire de l'ens. des x,y recherchés, à savoir ceux pour lesquels la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ est libre.

On part donc de

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

et on veut voir sous quelle(s) condition(s) sur x,y $(*)$ implique : $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Or $(*)$ équivaut à :

$$\begin{cases} 6\alpha + 3\beta + 3\gamma = 0 \\ 8\alpha + \gamma y = 0 \\ -\beta + \gamma x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 8\alpha + y\gamma = 0 \\ -\beta + x\gamma = 0 \end{cases} \overset{L_2' = L_2 - 4L_1}{\iff}$$

$$\iff \begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -4\beta + (y-4)\gamma = 0 \\ -\beta + x\gamma = 0 \end{cases} \overset{L_3' = -\frac{1}{4}L_2 + L_3}{\iff} \begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -4\beta + (y-4)\gamma = 0 \\ \left(-\frac{1}{4}(y-4) + x\right)\gamma = 0 \end{cases}$$

Le système a été échelonné par pivot de Gauss et on voit à la 3-ème équation qu'on a nécessairement $\gamma = 0$ ssi $x - \frac{1}{4}(y-4) \neq 0 \iff y \neq 4x+4$.

Obs : Sous cette condition $\gamma = 0$ mais on a l'obligation de s'assurer que les autres 2 éq du système échelonné ne fournissent pas d'autres conditions sur x, y !! En effet, car l'éq. no. 2 contient y aussi : $-4\beta + (y-4)\gamma = 0$. Certes, mais si $\gamma = 0$ alors elle équivaut à $\beta = 0$ et alors $\gamma = \beta = 0$ mis dans la première équation fournit $\alpha = 0$ nécessairement.

Conclusion : Sous la condition (unique) $y \neq 4(x+1)$ $(*) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ i.e. la fam. des 3 vect. est libre. D'une façon équivalente (par négation)

$$y = 4(x+1) \iff \text{la fam. } \{u_0, v_0, w\} \text{ est liée}$$

(4) Si $x = -1$ et $y = 0$ on voit que $y = 4(x+1)$ est vérifiée : $0 = 4(-1+1)$.

Donc d'après (3), la famille $\{u_0, v_0, w\}$ est liée.

Donc $\dim \mathrm{Vect}\{u_0, v_0, w\} = \dim \mathrm{Vect}\{u_0, v_0\}$.

Par ailleurs, $\dim \mathrm{Vect}\{u_0, v_0\} = 2$ car d'après (2), $\{u_0, v_0\}$ est libre et par déf. de "Vect" est génératrice de $\mathrm{Vect}\{u_0, v_0\}$ donc base de celui-ci, à 2 éléments.

(5) Puisque ds ce cas $w \in \mathrm{Vect}\{u_0, v_0\}$, on a $\mathrm{Vect}\{w\} \subset \mathrm{Vect}\{u_0, v_0\}$ donc leur intersection est $\mathrm{Vect}\{w\}$ qui n'est pas $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ puisque $w \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

Donc la somme n'est pas directe.

(6) Pour le cas $x = 1$ et $y = 1$, la relation $y \neq 4(x+1)$

est vraie car : $1 \neq 4(1+1)$, donc d'après (3) la famille $\{u_0, v_0, w\}$ est <u>libre</u>.

Pourtant, $\text{Vect}\{u_0, v_0, w\} + \text{Vect}\{w\}$ ne peut être directe, car $\text{Vect}\{w\} \subset \text{Vect}\{u_0, v_0, w\}$ donc leur intersection est $\text{Vect}\{w\} \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

(7) Oui, on a $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\{u_0, v_0\} \oplus \text{Vect}\{w\}$ car pour le cas $x = y = 1$, la fam. $\{u_0, v_0, w\}$ étant libre, elle engendre un e.v. $\text{Vect}\{u_0, v_0, w\}$ de dim $= 3$ mais qui, étant sous-ev. de $\mathbb{R}^3$ (lui aussi de dim $= 3$) on ne peut qu'avoir :

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\{u_0, v_0, w\} = \text{Vect}\{u_0\} \oplus \text{Vect}\{v_0\} \oplus \text{Vect}\{w\}$$
$$= \text{Vect}\{u_0, v_0\} \oplus \text{Vect}\{w\} = \text{Vect}\{u_0, w\} \oplus \text{Vect}\{v_0\}$$
$$= \text{Vect}\{v_0, w\} \oplus \text{Vect}\{u_0\}.$$

i.e. on peut décomposer en sommes directes comme on veut les s.e.v. engendrés par 1, 2, ... des él. d'une <u>base</u> d'un e.v. (ici : $\mathbb{R}^3$).

<u>EXERCICE 3</u> : (1) $f(x,y,z) := (y, x, 1)$ n'est pas linéaire car ne satisfait pas à la condition nécessaire : $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$. En effet :

$f(0,0,0) = (0,0,1) \neq (0,0,0)$.

(2) (a) $g(1,0,0) = (0,2,1)$; $g(0,1,0) = (-1,1,1)$; $g(0,0,1) = (1,1,0)$

d'où $M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ = matrice de g dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\text{Ker}\, g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) \overset{(*)}{=} (0,0,0)\}$
$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid M_{\mathcal{B}}(g) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Or, $(*) \Leftrightarrow$ (après arrangement convenable des équations) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \overset{\text{Pivot Gauss}}{\underset{L_2' = +L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ z = \lambda \text{ avec } \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Donc $\text{Ker}\, g = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Une base de Ker est faite du vect : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \text{Ker} = 1$

(c) g injective ssi $\text{Ker}\, g = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ce qui est faux, donc g n'est pas injective.

(d) Par le thm du rang : $\dim \underline{\mathbb{R}^3}$ (e.v. de départ pour g) $= \dim \text{Ker}\, g + \dim(\text{Im}\, g)$

$\Leftrightarrow \dim(\text{Im}\, g) = 3 - 1 = 2$.

(e) g surjective ssi $\text{Im}\, g = \mathbb{R}^3$ = esp. d'arrivée de g

Or $\dim(\text{Im}\, g) = 2 \lneq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc l'inclusion $\text{Im}\, g \subset \mathbb{R}^3$ (en tant que e.v.) est stricte ! Donc g n'est pas surjective !

(f) On sait que les images par g d'une base de l'e.v. de départ, $\mathbb{R}^3$, engendrent $\text{Im}\, g$; $\text{Im}\, g = \text{Vect}\left\{ g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Mais ces vect sont liés (vu à (e) : rang $g = 2 < 3$). Donc une base de $\text{Im}\, g$ est faite de 2 vect libres parmi ces 3, par ex : $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ car ils ne sont pas proportionnels !