Examen d'Algèbre Linéaire 1

Durée : 1h30

Les documents, les smartphones, les tablettes, les smartwatch et les calculatrices ne sont pas autorisés

Les exercices sont indépendants. Bien soigner la rédaction. Toute réponse sans justification vaut zéro

Note : Les questions signalées par une étoile sont un peu plus laborieuses et/ou difficiles

Exercice 1 : (Nombres complexes)

1. Calculer le module et l'argument de $u = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et $v = -1+i$.
2. Écrire u et v sous une forme trigonométrique et exponentielle.
3. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.
4. Calculer w par des moyens algébriques et en déduire la forme algébrique de w.
5. En comparant les résultats obtenus aux deux questions précédentes, en déduire les valeurs de cos et du sin de $\pi/12$.

6.* Résoudre l'équation $z^3 = \frac{1}{4}v$ en utilisant la forme exponentielle obtenue pour $v = -1+i$.

Exercice 2 : Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u_a = \begin{pmatrix} a \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $v_a = \begin{pmatrix} -1 \\ a^2 \\ 3 \end{pmatrix}$ où a est un paramètre réel.

1. Trouver la/les valeurs de a telles que $\{u_a, v_a\}$ soit une famille liée de vecteurs.
2. Prenons $a = 0$ et notons les vecteurs correspondants par u_0 par v_0. La famille $\{u_0, v_0\}$ est-elle libre ou liée ?

3.* Soient x, y deux parametres réels et $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Montrer que $w \in \mathrm{Vect}\{u_0, v_0\}$ (i.e. la famille à trois vecteurs $\{u_0, v_0, w\}$ est liée) *si et seulement si* le couple (x, y) vérifie : $y = 4(x+1)$.

4. En déduire, pour le cas $x = -1$ et $y = 0$, la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{u_0, v_0, w\}$.
5. Pour le même cas, $x = -1$ et $y = 0$, la somme $\mathrm{Vect}\{u_0, v_0\} + \mathrm{Vect}\{w\}$ est-elle directe ?
6. Pour le cas $x = 1$ et $y = 1$, la somme $\mathrm{Vect}\{u_0, v_0, w\} + \mathrm{Vect}\{w\}$ est-elle directe ?
7. Pour le même cas, $x = 1$ et $y = 1$ les sous-espaces $\mathrm{Vect}\{u_0, v_0\}$ et $\mathrm{Vect}\{w\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Tourner la page s.v.p. —>

Exercice 3 : Soit f et g deux applications $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définies pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ comme suit :

$$f(x, y, z) = (y, x, 1) \quad \text{et}$$
$$g(x, y, z) = (-y + z, 2x + y + z, x + y).$$

1. Montrer que f n'est pas application linéaire.
2. Supposons connu que g est linéaire.
   (a) Donner $M_{\mathcal{B}}(g)$, la matrice de g dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer $\mathrm{Ker}(g)$ le sous-espace noyau de g en indiquant une base de celui-ci.
   (c) Donner $\dim \mathrm{Ker}(g)$, la dimension de ce noyau. L'application g est-elle injective ?
   (d) Calculer le rang de g, autrement dit la dimension du sous-espace image $\mathrm{Im}(g)$ de g.
   (e) L'application g est-elle surjective ?
   (f) Calculer le sous-espace image $\mathrm{Im}(g)$ en indiquant une base de celui-ci.