Examen ALGEBRE 1, 2022

Exercice 1: $f(z) = \frac{2z-i}{z-2i}$

1. $f(2) = \frac{4-i}{2-2i} = \frac{(4-i)(2+2i)}{4+4} = \frac{8+8i-2i-2i^2}{8} = \frac{10+6i}{8} = \frac{5+3i}{4}$

2. a) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$:

$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{2z-i}{z-2i} = z \Leftrightarrow z^2 - 2iz - 2z + i = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 2(1+i)z + i = 0$

b) $\Delta = (-2(1+i))^2 - 4\times 1 \times i = 4(1+2i-1) - 4i = 4i$

c) M1: $\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x^2-y^2 = 0 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 2 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \pm\sqrt{2} \\ xy = 2 \end{cases}$.

$\delta_+ = \sqrt{2}(1+i)$ $\quad \delta_- = -\sqrt{2}(1+i)$

M2: $R^2 e^{2i\theta} = 4e^{i\pi/2} \Leftrightarrow \begin{cases} R = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \delta_+ = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$

et $\delta_- = 2e^{-i\pi/4} = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

d) $z_1 = \frac{2(1+i) - \sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2} = \frac{(2-\sqrt{2}) + i(2-\sqrt{2})}{2}$

$= \frac{2-\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$z_2 = \frac{2(1+i)+\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}(1+i)$

Exercice 2:

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}$.

- $0_{\mathbb{R}^3} \in F$
- Soit $u = (1,0,0)$ et $v = (0,1,0)$

$u \in F$ et $v \in F$.

$u+v = (1,1,0)$ $\quad 1\times 1 = 1 \neq 0$ $\quad u+v \notin F$

F n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$.

2. a) Mq G est un sev de $\mathbb{R}^4$.

- $0_{\mathbb{R}^4} \in G$, G est non vide
- $G \subset \mathbb{R}^4$.
- Soit $u = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $u \in G$ et $v \in G$.

$\lambda u + v = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2, \lambda t_1 + t_2)$.

- $u \in G$ donc $x_1 = 0$ et $y_1 = z_1$

$v \in G$ donc $x_2 = 0$ et $y_2 = z_2$.

$\lambda x_1 + x_2 = 0$ et $\lambda y_1 + y_2 = \lambda z_1 + z_2$

Ainsi $\lambda u + v \in G$. et G est un sev de $\mathbb{R}^4$.

b) $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ z = z \\ t = t \end{cases}$ $\quad S = \{(0,z,z,t), z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$

c) $u = (x,y,z,t) \in G \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow u = z(0,1,1,0) + t(0,0,0,1)$.

$G = \mathrm{Vect}(\underbrace{(0,1,1,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{e_2})$.

d) e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre.

Ainsi (e_1, e_2) est une base de G et $\dim(G) = 2$

e) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Posons $e_3=(1,1,0,0)$ et $e_4=(1,0,\alpha,0)$

$\mathbb{R}^4 = G \oplus H_\alpha \iff (e_1,e_2,e_3,e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$

$\iff (e_1,e_2,e_3,e_4)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ (car $\dim(\mathbb{R}^4) = \mathrm{card}(e_1,e_2,e_3,e_4)$)

Soient $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 4 réels.

$\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3+\alpha_4 e_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$ (*)

$\iff \alpha_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix}1\\0\\\alpha\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} \alpha_3+\alpha_4=0 \\ \alpha_1+\alpha_3=0 \\ \alpha_1+\alpha\alpha_4=0 \\ \alpha_2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1-\alpha_4=0 \\ \alpha_1+\alpha_3=0 \\ \alpha_1+\alpha\alpha_4=0 \\ \alpha_2=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} (1+\alpha)\alpha_4=0 \\ \alpha_1+\alpha_3=0 \\ \alpha_1+\alpha\alpha_4=0 \\ \alpha_2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1=+\alpha_4 \\ \alpha_3=-\alpha_4 \\ \alpha_2=0 \\ (1+\alpha)\alpha_4=0 \end{cases}$

si $\alpha \neq -1$: (*) $\iff \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$

si $\alpha=-1$: la famille est liée : $+e_1-e_3+e_4=0_{\mathbb{R}^4}$

Ainsi $\mathbb{R}^4 = G\oplus H_\alpha \iff \alpha\neq -1$.

Exercice 3:

1) $\mathcal{G}$ est libre donc $\dim(\mathrm{Vect}\ \mathcal{G})=4$.

2) $\mathcal{F}$ est libre car (e_1,e_2,e_3) est libre.

$\mathcal{G}$ est liée car $2e_1+e_4 = 2\times e_1 + \frac{1}{5}\times(5e_4)$

donc $2e_1+e_4$ est c.l de e_1 et $5e_4$.

Mq $\mathcal{H}$ est libre:

Soient $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 3 réels.

$\alpha_1(e_1+e_2)+\alpha_2(2e_1+e_4)+\alpha_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$

$\iff (\alpha_1+2\alpha_2)e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_2 e_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$

$\iff \begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2=0 \\ \alpha_1=0 \\ \alpha_3=0 \\ \alpha_2=0 \end{cases}$ car (e_1,e_2,e_3,e_4) est libre

$\iff \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ et $\mathcal{H}$ est libre.

3) $\dim(\mathcal{F})=3$, $\dim(\mathcal{G})=2$, $\dim(\mathcal{H})=3$.

Exercice 4:

1) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires car $\begin{cases} x_{\vec{a}}=x_{\vec{b}} \\ y_{\vec{a}}\neq y_{\vec{b}} \end{cases}$

de m̂ $\vec{c}$ et $\vec{d}$ ne sont pas colinéaires car $\begin{cases} x_{\vec{d}}=3x_{\vec{c}} \\ y_{\vec{d}}\neq 3y_{\vec{c}} \end{cases}$

2) $(\vec{a},\vec{b})$ et $(\vec{c},\vec{d})$ sont des familles libres et

$\dim(F)=\dim(G)=2$.

3) $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$ donc $\mathcal{A}$ est liée

$\vec{d}=2\vec{b}+\vec{a}$ donc $\mathcal{B}$ est liée.

4) $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont c.l de $\vec{a}$ et $\vec{b}$

donc $\vec{c} \in F$, $\vec{d} \in F$ et $Vect(\vec{c}, \vec{d}) \subset F$

Ainsi $G \subset F$ et $\dim(G) = \dim(F)$ donc $G = F$.

Exercice 5 : $f(x,y,z) = (x+2y+z,\ y,\ x+z)$

1. Mq f est linéaire :

Soit $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\lambda u + v = (\lambda x_1 + x_2,\ \lambda y_1 + y_2,\ \lambda z_1 + z_2)$

$$f(\lambda u + v) = \big((\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2) + (\lambda z_1 + z_2),\ \lambda y_1 + y_2,\ \lambda x_1 + x_2 + \lambda z_1 + z_2\big)$$

$$= \lambda f(u) + f(v).$$

f est linéaire.

2. Recherche de ker(f) :

$u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$u \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow u = z(-1, 0, 1)$$

$\ker(f) = Vect((-1,0,1))$

$\dim(\ker(f)) = 1$

3. D'après le Th. du rang :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f)) + \dim(Im(f))$$

donc $\dim(Im(f)) = 2$.

4. $Im(f) = Vect(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1))$

$$= Vect((1,0,1), (2,1,0), (1,0,1))$$

$$= Vect((1,0,1), (2,1,0)).$$

$\dim(Im(f)) = 2$ donc $((1,0,1), (2,1,0))$ est une base de $Im(f)$.