Université de Cergy-Pontoise - L1 - MIPI - 2021-2022 (**12.01.2021**)

Algèbre linéaire 1 : Contrôle Continu n^o 3 (Examen)

Durée : 2h

Les documents, les smartphones, les tablettes, les smartwatch et les calculatrices ne sont pas autorisés
Les exercices sont indépendants. Bien soigner la rédaction. *Toute réponse sans justification vaut zéro.*
Le sujet comporte 5 exercices.

EXERCICE 1 :

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on pose $f(z) = \dfrac{2z - i}{z - 2i}$.

1) Déterminer la forme algébrique de $f(2)$.

2) On se propose de résoudre l'équation $(\star)$: $f(z) = z,\ z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.

2.a) Montrer que cette équation équivaut à $(\star\star)$: $z^2 - 2(1+i)z + i = 0$.

2.b) Calculer le discriminant Δ de l'équation $(\star\star)$.

2.c) Déterminer les racines carrées $\delta_\pm$ de l'équation $\delta^2 = \Delta$.

2.d) Conclure, en donnant les solutions de l'équation $(\star)$.

EXERCICE 2 :

1) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$.
Décider si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en justifiant rigoureusement votre réponse.

2) Soit les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y = z\};\ \ H_\lambda = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

où λ est un paramètre réel.

2.a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2.b) Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système à 4 d'inconnues x, y, z, t : $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$.

2.c) En déduire une famille $\mathscr{S}$ de vecteurs de G qui engendre G (i.e. telle que l'on ait $G = \mathrm{Vect}\,\mathscr{S}$)

2.d) En déduire une base de G (avec justification).
Quelle est la dimension de G ?

2.e) Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que l'on ait $\mathbb{R}^4 = G \oplus H_\lambda$ (i.e. pour que G et H_λ soient supplémentaires en $\mathbb{R}^4$).

Tourner la page s.v.p. —>

EXERCICE 3 :

On considère dans $\mathbb{R}^4$ une famille libre à 4 vecteurs : $\mathscr{S} = (\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}; \vec{e_4})$.

1) Quelle est la dimension de l'espace $\operatorname{Vect} \mathscr{S}$ engendré par $\mathscr{S}$?

2) Les familles suivantes sont-elles libres ?
$\mathscr{F} = (\vec{e_1}; 2\vec{e_2}; 5\vec{e_3})$, $\mathscr{G} = (\vec{e_1}; 2\vec{e_1} + \vec{e_4}; 5\vec{e_4})$, $\mathscr{H} = (\vec{e_1} + \vec{e_2}; 2\vec{e_1} + \vec{e_4}; \vec{e_3})$.
(pour les premières deux justifier sans faire de calcul).

3) Dans chaque cas, préciser la dimension des sous-espaces engendrés par ces 3 familles.

EXERCICE 4 :

Soit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ écrits dans une base canonique de celui-ci :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Soit $F = \operatorname{Vect}(\vec{a}; \vec{b})$ et $G = \operatorname{Vect}(\vec{c}; \vec{d})$.

1) Les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ sont ils colinéaires ?
Même question pour la paire $\vec{c}, \vec{d}$.

2) En déduire que $\dim F = \dim G$ et préciser cette dimension.

3) Montrer que les familles à trois vecteurs $\mathscr{A} = (\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ et $\mathscr{B} = (\vec{a}; \vec{b}; \vec{d})$ sont liées.

4) Justifier pourquoi peut-on en déduire qu'on a $F = G$.

EXERCICE 5 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ f(x, y, z) = (x + 2y + z, y, x + z)$.

1. Montrer que f est application linéaire.
2. Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ (noyau de f) et sa dimension.
3. En déduire, via le théorème du rang, la dimension de $\operatorname{Im} f$, espace image de f.
4. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.