Contrôle Continu 4 (Examen) d'Algèbre Linéaire 1

Durée : 1h30

Les documents, les smartphones, les tablettes, les smartwatch et les calculatrices ne sont pas autorisés

Les exercices sont indépendants. Bien soigner la rédaction. Toute réponse sans justification vaut zéro

---

Exercice 1 :

1. Écrire le nombre complexe $u = \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}$ sous forme algébrique.
2. Écrire le nombre complexe $v = -1 + \mathrm{i}$ sous forme exponentielle.
3. Écrire le nombre complexe $\dfrac{u}{v}$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
4. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 :

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-3 - 4\mathrm{i}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3z + 3 + \mathrm{i} = 0$.

Exercice 3 :

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v_a = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -3 \end{pmatrix}$ où a est un paramètre réel.

1. Montrer que $\{u; v_a\}$ est une famille libre de vecteurs pour toute valeur de a.
2. Prenons $a = 2$ et notons v_a par v_2. Soit, pour x, y réels : $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Pour le cas $x = 1$ et $y = 2$, déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{u, v_2, w\}$ (espace engendré par les vecteurs u, v_2 et w).
   (b) Pour le cas $x = 1$ et $y = 1$:
      i. Montrer que la famille $\{u, v_2, w\}$ est libre.
      ii. La somme $\mathrm{Vect}\{u, v_2\} + \mathrm{Vect}\{w\}$ est-elle directe ? (Justifier.)
      iii. Les sous-espaces $\mathrm{Vect}\{u, v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{w\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? (Justifier.)

Exercice 4 :

Soit f et g deux applications $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définies pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ comme suit : $f(x, y, z) = (xy, x, y)$ et $g(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$.

1. Montrer que f n'est pas application linéaire.
2. Supposons connu que g est linéaire.
   (a) Donner $M_{\mathcal{B}}(g)$, la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer $\mathrm{Ker}(g)$ le sous-espace noyau de g en indiquant une base de celui-ci.
   (c) L'application g est-elle injective ? (Justifier.)
   (d) Calculer le rang de g, autrement dit la dimension du sous-espace image $\mathrm{Im}(g)$ de g en indiquant une base de celui-ci.
   (e) L'application g est-elle surjective ? (Justifier.)