CORRIGÉ du CC 3 - EXAMEN du 15.01.2021 | SUJET 2

EXERCICE 1 : 1 • $a = 1 \Rightarrow z_+ = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc $|z_+| = 2$ et $\arg z_+ = \frac{\pi}{3}$

• $a = -1 \Rightarrow z_- = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

Donc $|z_-| = 2$ et $\arg z_- = -\frac{2\pi}{3}$.

•• $z_+^6 = 2^6 e^{i\frac{6\pi}{3}} = 2^6 e^{2i\pi} = 2^6 \quad (e^{2i\pi} = 1)$

$z_-^6 = 2^6 e^{-i\frac{\cancel{6}^2\cdot 2\pi}{\cancel{3}}} = 2^6\left(e^{2i\pi}\right)^{-2} = 2^6 \cdot 1^{-2} = 2^6$.

$\mathrm{Im}(z_\pm^6) = 0$

2 card $\mathcal{S}$ est fini et $E = \mathrm{Vect}\,\mathcal{S} \Rightarrow E$ est de dim. finie

3 $f : E \to F$ est linéaire ssi

$\begin{cases} \forall x, y \in E : f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall x \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{cases}$

4 • $\mathrm{Im} f = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E : y = f(x)\}$.

• $\forall x \in E$ si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base de E,

$\exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n$ t.q. $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.

Alors $f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \underset{\uparrow\, f \text{ linéaire}}{=} \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$

donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ ce qui suffit, en particulier, pour montrer que $\mathrm{Im} f$ est s.e.v. de F.

EXERCICE 2 : (1.a) $\Delta = (i - \sqrt{2})^2 - 4(-i\sqrt{2}) =$

$= i^2 - 2i\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + 4i\sqrt{2} = i^2 + 2i\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$

$= (i + \sqrt{2})^2$.

(1.b) Les sol. de (*) sont : $z_\pm = \dfrac{-(i-\sqrt{2}) \pm r}{2}$

où r est une des racines complexes de Δ, autrement dit, où r vérifie $r^2 = \Delta$.

Or $r^2 = (i + \sqrt{2})^2$ montre que on peut prendre pour r la valeur $i + \sqrt{2}$ (ou bien $-i-\sqrt{2}$ mais ce sera pareil). Donc, avec ce choix :

$z_\pm = \dfrac{-i + \sqrt{2} \pm i \pm \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ ou $-i$

2 $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Alors $W^2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow$

$W^2 - \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(W - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(W + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow W = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ou $W = -e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

3 On pose $z = w^2$ dans l'équation d'ordre 4 notée (**). Ceci revient à résoudre (*) ce qu'on a déjà fait à 1b. On doit donc résoudre

$w^2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow w = \sqrt[4]{2}$ ou $w = -\sqrt[4]{2}$ et

$w^2 = -i \overset{2}{\Leftrightarrow} w = e^{-i\pi/4}$ ou $w = e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Ces quatre nombres sont les solutions de (**).

EXERCICE 3 : $u \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ ssi $\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $u = \lambda v_1 + \mu v_2$.

Dans notre cas ceci revient à :

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\4\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\-3\\2\\-4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 4 = 4(\lambda - \mu) \end{cases} (S') \quad \begin{cases} x = 2\lambda - 3\mu \\ y = 3\lambda + 2\mu \end{cases} (S'').$$

Or $(S') \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 1 \\ \mu = 0\end{cases}$ (val. uniques)

d'où $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ (val. uniques).

EXERCICE 4 : (1) $A = \begin{pmatrix}2 & -1\\6 & 10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & -7\\-8 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -8\\-2 & 16\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1 & -8\\-2 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 8y = 0 \\ -2x + 16y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ (donc le syst. d'équations est de rang $= 1$)

On choisit $y = \lambda$ paramètre réel quelconque et on obtient l'ens. des sol. du système :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix}8\lambda\\\lambda\end{pmatrix} \middle| \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}\right\}$$

(3) On remarque ci-dessus que le système échelonné a une seule éq nontriviale $\Rightarrow$ rang $= 1$

(4) La matrice A, vue comme une énumération horizontale de vect-colonnes (ou verticale de vecteurs-lignes) a ces vecteurs proportionnels donc le nombre de vecteurs linéairement indépendants que peut avoir cette famille de 2 vect. est $= 1$.

Donc rang $A = 1$.

EXERCICE 5

(1) $\forall (x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$f((x,y,z) + \lambda(x',y',z')) = f((x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')) \overset{\text{def}}{=}$

$((x+\lambda x') - (y+\lambda y') + (z+\lambda z'), y+\lambda y', y+\lambda y')$

$= ((x-y+z) + \lambda(x'-y'+z'), y+\lambda y', y+\lambda y')$

$= (x-y+z, y, y) + \lambda(x'-y'+z', y', y') =$

$= f(x,y,z) + \lambda f(x',y',z')$.

(2) $\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \underbrace{f(x,y,z) = (0,0,0)}_{(*)} \right\}$

$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-y+z\\y\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

On choisit donc $z = \lambda$ comme paramètre quelconque et alors

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix}-\lambda\\0\\\lambda\end{pmatrix} \middle| \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

d'où $\dim \mathrm{Ker} f = 1$. (base de Ker f car formée d'un vect $\neq 0_{\mathbb{R}^3}$)

(3) Par le thm du rang :

$\underset{\text{vu comme esp. vect de départ pour } f}{\dim \mathbb{R}^3} = \dim \mathrm{Ker} f + \underbrace{\dim \mathrm{Im} f}_{\text{rang } f}$

$\Leftrightarrow 3 = 1 + \text{rang} f \Leftrightarrow \text{rang} f = 2$.

④ $f\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_1}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $f\left(\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_2}\right)=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$; $f\left(\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_3}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

⑤ On sait que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ mais cette famille de 3 vecteurs n'est pas forcement une base car pas forcément libre. En effet, ds notre cas on sait que $\dim \mathrm{Im} f = 2$ donc on peut extraire de la fam. ci-dessus un syst de vect libre à 2 vect.
Comme $f(e_1) = f(e_3)$ on éliminera un d'entre eux et on obtient une base de Im : $\mathcal{B}' = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ qui est évidemment libre puisque les vect ne sont pas co-linéaires : $\frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1}$.

⑥ De (4) on déduit $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

⑦ $A - \mathbb{I}_3 = \begin{array}{ccc}\left(\boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right. & \boxed{\begin{matrix}-1\\0\\1\end{matrix}} & \left.\boxed{\begin{matrix}1\\0\\-1\end{matrix}}\right)\\ \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ C_1 & C_2 & C_3\end{array}$. Toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.

Comme $C_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$, $\{C_1, C_2, C_3\}$ est liée
(Ce n'est pas la seule raison : on voit que $C_2 = -C_3$)

⑧ Pour rendre libre une sous-famille de $\mathcal{G} = \{C_1, C_2, C_3\}$ il faut enlever $C_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On reste avec $\mathcal{G}' = \left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ or elle est liée car C_2 et C_3 sont co-linéaires. Donc il faut éliminer un d'entre-eux, après quoi on obtient une famille à un seul vecteur $\neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc libre.

Or, le rang d'une famille de vecteurs est le cardinal de la plus grande famille libre que l'on puisse extraire ; dans notre cas rang $\mathcal{G}$ = Card$\{C_1\} = 1$
De même le rang de la matrice $A - \mathbb{I}_3$ (dont les colonnes sont les vect de $\mathcal{G}$) est le rang de $\mathcal{G}$ donc $\mathrm{rang}(A - \mathbb{I}_3) = 1$.

⑨ Il suffit de montrer que la famille formée par l'union des bases de $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ est libre : Ayant 3 vecteurs, la famille
$\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ sera une base de $\mathbb{R}^3$

(ce qui prouve $\mathrm{Im} f + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$).
Or $\mathcal{F}$ est libre ssi son rang vaut 3 ce qu'on peut établir en faisant le pivot sur la matrice attachée : $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \leftarrow$ rang = 3 car aucune ligne nulle.
donc $\mathcal{F}$ est libre.

⑩ Par calcul : $A^2 = A$ $(*)$
Or, A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ donc en termes d'applications linéaires, on a $f^2 \underset{not}{=} f \circ f \overset{(*)}{=} f$ à savoir f est un projecteur.
Remarquer que ceci s'écrit aussi $f \circ (f - \mathrm{Id}) = 0$.