SUJET 1

CORRIGÉ du CC3 – EXAMEN du 15.01.2021.

EXERCICE 1: ① $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

D'où : $w^n = 1$ si $n = 0$ et si $n \neq 0$: $w^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

Donc si $n \neq 0$: $|w^n| = r^n = |w|^n$ et un argument de w^n est $n\theta$.

② $F \neq \emptyset$ et $\begin{cases} \forall x, y \in F : x + y \in F \\ \forall x \in F \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda x \in F \end{cases}$

③ $\dim E < \infty \Rightarrow$ les dim des s.e.v. $F, G, F\cap G$ et $F+G$ sont finies aussi. Alors on a la formule de Grassmann :

$\dim F + \dim G = \dim(F \cap G) + \dim(F + G)$

④
- $\mathrm{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
- $\forall x, y \in \mathrm{Ker} f$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $f(x + \lambda y) \overset{f \text{ est linéaire}}{=} f(x) + \lambda f(y) = 0_F + \lambda \cdot 0_F = 0_F$

donc $x + \lambda y \in \mathrm{Ker} f \neq \emptyset$ car $0_E \in \mathrm{Ker} f$.

Donc $\mathrm{Ker} f$ est s.e.v. de E.

EXERCICE 2 : ① Pour $n = 4$ la formule donne

$$1 + \omega + \ldots + \omega^4 = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = \frac{1 - e^{\frac{2i\pi}{\cancel{5}}\cdot\cancel{5}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{2i\pi/5}} = 0$$

② $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ (une des deux formules de Euler)

$$\omega + \omega^4 = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{2i\pi}{5}\cdot 4} = e^{\frac{2i\pi}{5}} + \underbrace{e^{\frac{2\cdot\cancel{5}\pi i}{\cancel{5}}}}_{=1} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{5}}$$

$\boxed{2\cdot 4 = 8 = 10 - 2 = 2\cdot 5 - 2}$

$$= e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\omega^2 + \omega^3 = e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{\frac{4i\pi}{5}} + \underbrace{e^{\frac{2\cdot\cancel{5}\pi i}{\cancel{5}}}}_{=1} e^{-\frac{4i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$\boxed{6 = 10 - 4 = 2\cdot 5 - 4}$

③ En remplaçant les résultats de (2) dans celui de (1) on a :

$$\underbrace{2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}_{\omega^2+\omega^3} + \underbrace{2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}_{} + 1 = 0$$

$\overset{\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1}{\Longleftrightarrow}$ $2\left(2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1 = 0$

$\Longleftrightarrow$ $4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$,

i.e. $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

④ Les racines de $4x^2 + 2x - 1 = 0$ sont :

$$x_\pm = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot 4}}{2\cdot 4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est une de ces 2 valeurs. Mais $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ alors que $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0$.

Donc nécessairement $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

EXERCICE 3 : $u = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ ssi $\exists \lambda, \mu$ t.q. $u = \lambda v_1 + \mu v_2$

Or ceci équivaut à :

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 4\lambda - 4\mu \end{cases} (S') \quad \begin{cases} 1 = 2(\lambda - \mu) \\ 1 = 3(\lambda + \mu) \end{cases} (S'')$$

On peut résoudre (S'') séparément :

$$\begin{cases} -\mu + \lambda = 1/2 \\ \mu + \lambda = 1/3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\mu + \lambda = 1/2 \\ 2\lambda = 1/3 + 1/2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{5}{12} \\ \mu = \frac{5}{12} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{12} \end{cases}$$

Ces solutions uniques on les remplace en (S') :

$$\begin{cases} x = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \\ y = 4\left(\frac{5}{12} + \frac{1}{12}\right) = 2. \end{cases}$$

Donc $\{u, v_1, v_2\}$ est liée ssi $u = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4 :

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 10 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -7 & 4 \\ -2 & -26 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 2 & -16 & 8 \end{pmatrix}$

(2) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} (S) \begin{cases} x - 8y + 4z = 0 \\ 2x - 16y + 8z = 0 \end{cases} \overset{\text{Pivot}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - 8y + 4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Le nombre d'équations du syst. échelonné est 1 et le nb. d'inconnues est 3 donc on choisit $3 - 1 = 2$ inconnues comme paramètres. Par ex. $y = \lambda$, $z = \mu$ d'où $x = 8\lambda - 4\mu$ donc les sol. du système sont :

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\lambda - 4\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc l'ens. des sol. du système est le sous-esp. vect de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{c'est une base de } \mathcal{S} \text{ car}}$

(linéairement indépendants automatiquement du fait qu'ils ont été obtenus suite à un syst échelonné)

(3) Le rang du système (S) est le nombre d'équations non toutes nulles (donc pas du type $0 = 0$) résultant après avoir appliqué le pivot complètement (donc après avoir échelonné (S) entièrement). Dans notre cas on a vu que (S) se réduit à une seule éq. non triviale donc rang$(S) = 1$.

(4) Le rang d'une matrice est le nombre de ces lignes/colonnes (c'est pareil même si la matrice est rectangulaire $n \times m$) qui, vues comme vecteurs colonne/ligne, forment une famille libre maximale. Dans notre cas les colonnes de A sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -8\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc, comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ toute famille libre que l'on puisse extraire de la famille liée $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -8 \\ -16 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ ne peut avoir qu'un seul vecteur, par ex. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est famille libre maximale pour ce cas, donc le rang de la famille liée à 3 vecteurs colonne, et donc le rang de A, vaut 1.

EXERCICE 5 : On adoptera la notation vect-colonne

(1) $\mathrm{Ker} f = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, la fam. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre donc base de $\mathrm{Ker} f$. donc $\dim \mathrm{Ker} f = 1$.

(2) Par le thm du rang : $\dim \underset{\text{vu comme e.v. de départ pour } f}{\mathbb{R}^3} = \dim \mathrm{Ker} f + \mathrm{rang} f$

$\Rightarrow \mathrm{rang} f = \dim \mathrm{Im} f = 3 - 1 = 2$.

(3) On sait que si $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$.

Par ailleurs, on sait que $\dim \mathrm{Im} f = 2$ donc une fois la base $\mathcal{B}$ convenablement trouvée, il nous faudra seulement 2 parmi les trois vecteurs $f(e_i)$ ci-dessus pour engendrer $\mathrm{Im} f$, et on les choisira de sorte qu'ils soient lin. indép., donc qu'ils nous fournissent une base de $\mathrm{Im} f$.

Or, dans notre cas l'hypothèse nous fournit l'action de f sur 2 des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et il ne nous reste plus qu'à s'assurer qu'ils sont lin. indépendants : c'est vrai, car ils sont non colinéaires : $\frac{3}{1} \neq \frac{1}{2}$.

En conclusion : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$ et cette famille génératrice de $\mathrm{Im} f$ est libre donc elle est une base de $\mathrm{Im} f$.

(4) Rappellons-nous que pour un e.v. E de dim. finie et pour 2 s.e.v de E notés F et G on a les équiv.

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} E = F+G \\ \text{et} \\ F\cap G = \{0_E\}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E = F+G \\ \text{et} \\ \dim E = \dim F + \dim G\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ \text{et} \\ F\cap G = \{0_E\}\end{cases}$$

Dans notre cas $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Ker} f$ et $G = \mathrm{Im} f$, et le théorème du rang $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = 1+2 = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$ nous assure que le "bilan de dimension" est vérifié.

Choisissons de montrer que $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Or, ceci revient à vérifier (facile à prouver) que si l'on réunit les bases trouvées pour $\mathrm{Ker} f$ et pour $\mathrm{Im} f$ on obtient une famille à 3 vecteurs qui est libre (remarquer que ça montre aussi que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$ car une telle famille libre à 3 (vect) $= \dim \mathbb{R}^3$ ne peut être que base de $\mathbb{R}^3$, or elle est faite de vect de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$, donc $\mathbb{R}^3 \subseteq \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$)

En effet, la famille union de bases de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est libre. On peut échelonner la matrice attachée pour se convaincre que elle est de rang $= 3 =$ nb. de vect. de la famille.

$$\begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&1\\0&-5&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$ ← de rang 3 car aucune ligne/colonne triviale.

(5) On a vu que $f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ or, f étant linéaire

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \stackrel{\text{Hyp}}{=} f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

d'où $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-3\\0\end{pmatrix}$.

(6) On dispose actuellement des images par f de tous les vect de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ sera formée de sorte que ses colonnes sont ces images dans l'ordre d'énumération de $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-4\\-3\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\2\\0\end{matrix}} \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) & f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) & f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\end{matrix}$$

Obs : elle a une ligne toute nulle et les 2 autres non-proportionnelles donc elle est bien de rang $= 2$ (on le savait car rang $f = 2$)

(7) On calcule $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}3&-4&1\\1&-3&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x-4y+z\\x-3y+2z\\0\end{pmatrix}$$ donc

$$f(x,y,z) = (\underbrace{3x-4y+z}_{a}, \underbrace{x-3y+2z}_{b}, \underbrace{0}_{c}).$$