

Algèbre linéaire 1 : Contrôle Continu n° 3 (Examen)

Durée : 2h – Sujet 1

*Les documents, les smartphones, les tablettes, les smartwatch et les calculatrices ne sont pas autorisés
Les exercices sont indépendants. Bien soigner la rédaction. Toute réponse sans justification vaut zéro*

EXERCICE 1 : (Questions de cours et applications)

1. Soit w un nombre complexe de module r et d'argument θ .
Donner les formes trigonométrique et exponentielle de $z = w^n$ où $n \in \mathbb{N}$ en précisant le module et un argument de z .
2. Soit E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et F un sous-ensemble de E .
Donner un critère nécessaire et suffisant pour que F soit sous-espace vectoriel de E .
3. Soit E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E .
Donner une relation qui relie les dimensions de $F, G, F+G$ et $F \cap G$.
4. Soit E et F des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.
Donner la définition de $\text{Ker } f$, noyau de f et montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E .

EXERCICE 2 : Soit le nombre complexe $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. En utilisant la formule d'une somme géométrique $\sum_{k=0}^n \omega^k = \frac{1 - \omega^{n+1}}{1 - \omega}$
vérifier que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
2. Rappeler la définition de $\cos \theta$ en termes de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ et en déduire que, pour $\theta = \frac{2\pi}{5}$, on obtient :
$$\omega + \omega^4 = 2 \cos \left(\frac{2\pi}{5} \right) \text{ et } \omega^2 + \omega^3 = 2 \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right).$$
3. Utiliser les deux questions précédentes ainsi que la formule $\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$, pour montrer que $\cos \left(\frac{2\pi}{5} \right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
4. Résoudre cette équation par des moyens algébriques : calculer son discriminant et trouver ses racines.
5. En déduire (des deux questions précédentes) la valeur exacte de $\cos \left(\frac{2\pi}{5} \right)$.

EXERCICE 3 :

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Montrer que $u = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \\ y \end{pmatrix} \in \text{Vect}\{v_1, v_2\}$ si et seulement si $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, 2\right)$.

EXERCICE 4 :

1. Déterminer la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 10 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.
2. En posant $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ résoudre le système linéaire (S) équivalent à cette équation matricielle et présenter sa solution comme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
3. Déduire le rang du système (S) (et par la même celui de la matrice A) de la forme échelonné obtenue pour (S) par la méthode du pivot.
4. Juste en observant la matrice A obtenue par calcul à la question (1) peut-on déjà trouver son rang ? Justifier.

EXERCICE 5 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ application linéaire telle que :

$$f(1, 0, 0) = (3, 1, 0), f(0, 0, 1) = (1, 2, 0) \text{ et } \text{Ker } f = \{(\lambda, \lambda, \lambda) \mid \forall \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

1. Donner une base de $\text{Ker } f$ et sa dimension.
2. En déduire le rang de f (dimension de $\text{Im } f$ l'espace image de f).
3. En déduire (ou trouver par calcul direct) une base de $\text{Im } f$.
4. Montrer : $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.
5. En utilisant la définition de $\text{Ker } f$ déduire que $f(0, 1, 0) = (-4, -3, 0)$.
6. Donner la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
7. Pour un quelconque $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ trouver l'expression de $f(x, y, z)$ sous la forme d'un triplet (a, b, c) où a, b et c sont des combinaisons linéaires de x, y, z que l'on précisera.